2.7 Dedekind y los Números Reales.

"*Los números son la libre creación de la mente humana*". R. Dedekind.

Richard Dedekind (1831-1916)

En esta corta frase, que sirve de epígrafe a esta sección, Dedekind pone de manifiesto su posición filosófica en torno al origen de los números. A diferencia de Kronecker, para quien los números naturales anteceden al hombre, Dedekind considera que los números en general son producto de la mente sin otras consideraciones en cuanto a su origen.

Richard Dedekind estudió en la Universidad de Gotinga, antes que esta institución llegara a convertirse en la meca de las matemáticas en el tiempo de Felix Klein y de David Hilbert[1]. La universidad, aunque contaba con docentes como Carl Friederich Gauss (Ver Fig. 2.8.2) y Wilhelm Weber (luego profesor de Hilbert en Königsberg), tenía en esa época un nivel relativamente elemental en los cursos de matemáticas, por cuanto que, allí se formaban, principalmente docentes de educación media. No obstante, fue en esta universidad donde su apego a la teoría de números se inició, particularmente por la sorprendente impresión que le generó las magistrales clases de Gauss y porque fue este famoso matemático quien le asesoró en su tesis de grado. Dedekind, a través del colegaje de sus coterráneos, Bernhard Riemann (1826-1866) y Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) en Gotinga, recibió la influencia de las nuevas tendencias de las matemáticas que venían de Francia, incluyendo la teoría de Galois que apenas empezaba a conocerse en Alemania.

Como mencionábamos antes, al extender el campo de los números reales de tal forma que se incluyera a los números irracionales, el conjunto ampliado de los números reales tenía ya existencia, pero eran pocos los ejemplos de números irracionales que se podían exhibir distintos a las raíces cuadradas de números naturales que no fueran cuadrados perfectos; o combinaciones como $(1 + \sqrt{5})/2$ (la razón áurea[2]). Un número irracional que no se acomoda a ese formato de las raíces, es el número π. Este número corresponde a la longitud de la semicircunferencia de radio unidad, o también, al área del círculo de radio uno. La naturaleza de π sólo vino a entenderse después del siglo XVIII, cuando primero, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) demostró su irracionalidad y luego Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) probó su trascendencia, esto es, π no es algebraico, o que no resulta como solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros (o racionales, si se quiere)[3]. Lindemann, con quien hizo su tesis doctoral David Hilbert, entre otras cosas, pasó por Gotinga, pero hizo su doctorado bajo la dirección de Felix Klein por ese tiempo profesor en la Universidad de Erlangen.

El número π juega un rol importante, pues no hay área de las matemáticas, donde este número no esté presente. Por ejemplo, la siguiente fórmula se deriva de la función ς (se lee *Zeta*) de Riemann y está conectada con la teoría analítica de números.

---

[1] PAREJA, D. David Hilbert y su Escuela. Matemática-Enseñanza Universitaria. No. 7. Bogotá. 1978, con versión actualizada en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/historiam.htm

[2] PAREJA, D. *Temas de Historia de las Matemáticas. Pág.* 111.

[3] *Ibidem. Pág.* 76.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1/[(1\text{-}1/2^2)(1\text{-}1/3^2)(1\text{-}1/5^2)(1\text{-}1/7^2)(1\text{-}1/11^2)\ \ldots].$$

Donde el producto de la derecha recorre todos los números primos. Esta fórmula la debemos a Leonhard Euler (1707-1783) y se conoció como el problema de Basilea.[4]

Dedekind introdujo las cortaduras que llevan su nombre en 1858 con el propósito de asociar a cada real *r* dos conjuntos de racionales: aquellos que son menores que *r* y los que son mayores que *r*. Por definición entonces, cada real origina dos conjuntos de racionales, el primero acotado superiormente por *r* y el segundo acotado inferiormente por el mismo *r*. Basándose en el axioma de continuidad, concluyó que todo conjunto acotado superiormente tiene un extremo superior y que todo conjunto acotado inferiormente tiene un extremo inferior. Para el caso de estos dos conjuntos de racionales, el extremo superior coincide con el extremo inferior o sea, con el real *r*. De aquí se sigue la definición general de número real como: *el límite de sucesiones racionales que aproximan al real r por defecto y por exceso.* Por ejemplo $\sqrt{2}$, puede definirse en base a la cortadura:
$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2 \vee a \leq 0\}$,
$B = \{b \in \mathbb{Q} : b^2 \geq 2 \wedge b > 0\}$.

Q es notación acostumbrada para representar a los números racionales. En *B* no puede darse que $b^2 = 2$, porque implicaría que $b = \sqrt{2}$ es racional, lo que mostramos antes que era imposible.

Algunos autores[5] definen un número real *r*, como un número cuya representación decimal es infinita, esto es:

$$r = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} a_j 10^j\ .$$

Donde los a_j corresponden a dígitos de nuestro sistema decimal, *j* recorre todos los números enteros, incluyendo cero y los enteros negativos. Los a_j pueden ser positivos, negativos o cero. Es claro que estas representaciones de *r* como series infinitas, se supone convergen, y precisamente al número real *r*. Esta representación, en general, no es única. P. e. 1.000… = 0.999… .

Consecuencia del anterior análisis es el hecho de que, un real puede definirse como una suma infinita de racionales, y que a su vez, puede aproximarse por defecto o por exceso tanto como se quiera utilizando como base la suma de racionales. Aquí viene a resolverse el problema filosófico iniciado por los pitagóricos de expresar los irracionales en términos de racionales, pero desde luego, usando el concepto de un infinito actual, muy diferente al infinito potencial manejado por Aristóteles y los antiguos griegos, el cual sólo tiene una connotación simbólica, como algo a lo que nunca se puede acceder. El infinito actual es ya en matemáticas, desde el tiempo de Cantor, un objeto matemático que permite manipularse a través de ciertas convenciones.[6]

Con Dedekind se cierra un capítulo interesante de la historia de las matemáticas, en el cual, participaron filósofos y matemáticos en un período de más de dos mil años. Los números reales tienen existencia fuera de la geometría, como hemos tratado de mostrar a lo largo de las secciones anteriores. La geometría analítica ha permitido establecer una relación biunívoca entre puntos de una

---

[4] PAREJA-HEREDIA, D. *Leonhard Euler. Tres Siglos Después*. Lecturas Matemáticas. Vol. 28 (2007). Versión en la WEB: http://scm.org.co/Articulos/844.pdf

[5] ALLENDOERFER/OAKLEY. *Fundamentos de Matemáticas Universitarias*. Editorial McGraw-Hill. 1993

[6] Ver ROYDEN, H. L. *Op. Cit.* Pág. 34

recta y números reales. Este recurso es esencialmente didáctico aunque no necesario. Uno habla de la recta real como si se tratara de los mismos números reales, pero siempre debemos recordar que los números están antes que, la asociación de estos con los puntos de una recta se diera en la geometría analítica.

2.8 Los enteros gaussianos y los números complejos.

Mencionábamos antes cómo la inocente ecuación lineal $x + 1 = 0$, permitía introducir los números enteros. Análogamente la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, nos permite introducir un número que no puede ser real, por cuanto que, la suma de dos cuadrados, al menos uno de ellos distinto de cero (como es el caso de 1), no puede ser cero.

Los números reales poseen entre sus propiedades una, que en particular, nos garantiza que para todo x, $x^2 \geq 0$, esto es: todo cuadrado es no negativo. La gráfica de la función $y = f(x) = x^2$ (Fig. 2.8.1), ilustra que estos valores funcionales son no negativos, es decir en el peor de los casos, $x^2 = 0$, cuando $x = 0$, pues como muestra la figura, los valores funcionales están por encima del eje x en el primer y segundo cuadrante.

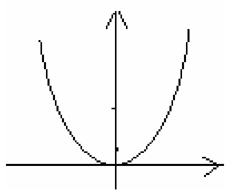

Fig. 2.8.1. La figura muestra la gráfica de la función $y = f(x) = x^2$. Sus valores son siempre no negativos, o, sea que $y \geq 0$, para todo x.

Se sigue pues, que la ecuación $x^2 + 1 = 0$, no puede tener soluciones en **R**. Se define entonces, como ***i*** (unidad imaginaria) una solución de esta ecuación. La otra solución será, $x = -\boldsymbol{i}$.

Un número complejo, hoy lo denotamos como, $z = a + b\boldsymbol{i}$, con a y b en **R**. Sin embargo llegar a esta notación tomó un espacio largo de tiempo. Fue Leonhard Euler (1707 - 1783), quien trabajó ya, los números complejos con toda naturalidad, introduciendo a su vez la notación ***i***, para la unidad imaginaria. Es a él también, a quien debemos la fascinante fórmula:

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

donde aparecen: ***e*,** el número de Euler, base de los logaritmos naturales; $\boldsymbol{\pi}$**,** la longitud de la semicircunferencia unitaria; ***i***, la unidad imaginaria; **1**, el elemento neutro para el producto y **0**, el elemento neutro para la suma. Además en la fórmula aparecen las tres operaciones importantes de la aritmética: adición, multiplicación y exponenciación. Euler llegó a esta fórmula a través de la definición de la exponencial compleja:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

cuando $x = \pi$.

Descartes (1637) originó los términos parte real y parte imaginaria de un complejo. Cauchy (1821) introdujo los términos *conjugado* y *modulo* de un complejo y Gauss (1824) empezó a usar la palabra "complejo", para los números en **C**, definidos más adelante**.** Sir William Rowan Hamilton (1837) estudió los complejos, como pares ordenados (a , b) de números reales, con la estructura algebraica con la que los conocemos hoy.

Con la ayuda de la unidad imaginaria $\boldsymbol{i}$, podemos definir el conjunto:

$$\mathbf{Z}[\,\boldsymbol{i}\,] = \{a + b\boldsymbol{i} : \ a, b \in \mathbf{Z}, \ \boldsymbol{i} = \sqrt{-1}\ \}.$$

Los números de esta forma se llaman enteros gaussianos y conforman una estructura algebraica conocida como *anillo euclidiano* (un dominio de integridad donde el algoritmo de Euclides se cumple). Estos números juegan un papel similar al de los números enteros corrientes. Aquí se pueden definir números primos y compuestos, definir procesos análogos al algoritmo de la división, etc. Estos números se pueden representar en el plano y su gráfica, se asimila al reticulado proveniente de la representación de los números racionales en el plano cartesiano.

Definición. Si $z = a + b\boldsymbol{i}$, y $a, b \in \mathbf{R}$, el conjunto que resulta, se define como el conjunto de los números complejos y se denota por **C.** En este conjunto estarán, por ejemplo, todas las soluciones de ecuaciones cuadráticas del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde a, b, c son números reales. Pero mucho más que esto, también aparecerán números complejos que no son soluciones de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, como es el caso del número $\pi + \boldsymbol{i}$, que es un número trascendente.

Los enteros gaussianos han jugado un rol importante, particularmente en los teoremas de reciprocidad y en el Último Teorema de Fermat[7] y han sido fuente de motivación para el origen y desarrollo de la teoría algebraica de números. Antes que se iniciara el algebra moderna o la teoría algebraica de números, por allá por el siglo XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) descubrió interesantes patrones en el comportamiento de una congruencia cuadrática como:

$$x^2 \equiv p \pmod{q} \qquad \textbf{(*)}$$

El símbolo "≡", se usa para representar congruencias. Las congruencias son clases de equivalencia, como las que vimos en el caso de los números racionales, solo que aquí, los valores se toman en **Z**. Por ejemplo, la congruencia x ≡ 1 (mod 2), representa al conjunto de todos los enteros que al dividirlos por 2, dejan residuo 1, es decir, el conjunto solución de esta congruencia, es {…, -3, -1, 1, 3,…} (los números impares) y se representa por [1], llamada la clase residual 1 módulo 2. Estas clases residuales a su vez son clases de equivalencia, donde la relación R en este caso " ≡ " se define en los siguientes términos: $x \equiv a \pmod{q}$, siempre que exista k tal que $x - a = kq$. Cada congruencia módulo q particiona a los enteros en clases residuales, denotadas por [0], [1], [2], … , [q-1]. Estas particiones se notan, **Z/q (**se lee, zeta partido q**)**. Simbólicamente,

$$\mathbf{Z/q} = \mathbf{\{}[0], [1], [2], \ldots, [q\text{-}1]\mathbf{\}}.$$

En álgebra moderna, este conjunto se conoce como el conjunto cociente de **Z** y **q**. Las congruencias cuadráticas son generalizaciones de las ecuaciones cuadráticas, cuyas soluciones estarán en el conjunto, **Z/q = {**[0], [1], [2],…, [q-1]**}**, correspondiente a las clases residuales módulo q. Un ejemplo es la congruencia:

[7] Para una corta historia del Último Teorema de Fermat antes de Wiles ver: PAREJA HEREDIA, D. *Op. Cit.* Pág. 67.

$$x^2 \equiv 1 \pmod 3,$$

cuyas soluciones son $x = [1]$, y, $x = [2]$. Las clases residuales módulo 3 son $\{[0], [1], [2]\}$.

Euler llamó a p en la ecuación (*), un residuo cuadrático módulo q, siempre que la congruencia tenga solución, y conjeturó el siguiente teorema.

Teorema de reciprocidad cuadrática. Para primos impares p y q, con $p \equiv 1$ (mod q), p es un residuo cuadrático módulo q si y sólo si q es un residuo cuadrático módulo p.

Lo anterior significa que la congruencia cuadrática **(*)** de arriba, está asociada a una dual del tipo

$$x^2 \equiv q \pmod p.$$

De tal forma que si una de las congruencias tiene solución, su dual, también la tendrá.

El pronóstico de Euler, con el tiempo, se convirtió en el mencionado *teorema de reciprocidad cuadrática*, corazón de la obra clásica de Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*[8].

La prueba de este teorema, motivó a Gauss a intentar un resultado similar para congruencias de cuarto grado. El problema resultó duro de resolver, y Gauss tuvo que recurrir a una nueva familia de enteros, estos son los enteros a los que nos referimos arriba, denominados por Gauss como números enteros complejos y hoy conocidos como *enteros gaussianos*. En ellos desarrolló toda una aritmética similar a la aritmética de los enteros, que lo condujo a un resultado análogo al teorema fundamental de la aritmética o teorema de factorización única. Gauss no logró la prueba de esta extensión del teorema, a formas cuárticas. Fue Ferdinand G. Eisenstein (1823-1852) quien en 1840 dio cinco pruebas de este teorema. Para un estudio más detallado de estos temas puede verse el artículo del *Monthly* de Agosto/Septiembre de 2005. [9]

Fig. 2.8.2. Retratos a pluma de Carl F. Gauss (1877-1855) y Wilhelm Weber (1804-1891) en la época cuando eran profesores de la Universidad de Gotinga en Alemania. Gauss es una de las grandes figuras históricas, quien contribuyó prácticamente a todas las áreas de las matemáticas. A Weber lo conocemos más como físico que como matemático. Fue uno de los primeros físicos en estudiar la electromecánica, la electrodinámica y la estructura eléctrica de la materia.

Siguiente Sección: *Geometría Euclidiana*

[8] GAUSS, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae.* Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Santafé de Bogotá, D. C. 1995. Esta es una traducción del latín de la edición alemana de 1801, dirigida por Ángel Ruiz Zúñiga.

[9] DRESDEN, G. et al. *Finding Factors of Factor Rings over Gaussian Integers*. The American Mathematical Monthly. Volume 112, Number 7.