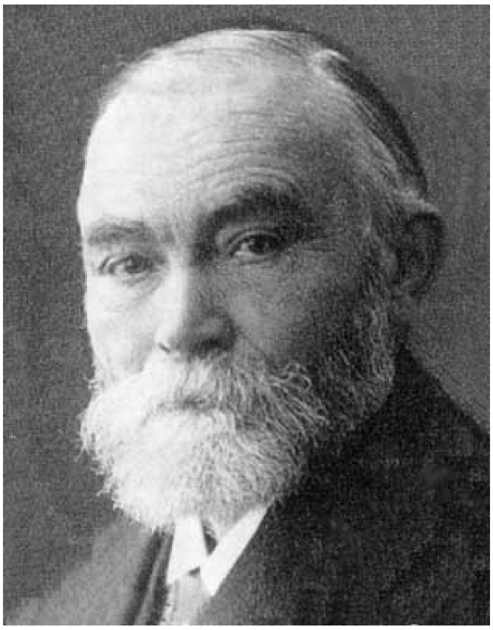
"*Todo buen matemático es al menos mitad filósofo. Todo buen filósofo es al menos mitad matemático*". G. Frege

"*La llave de entrada a los fundamentos de las matemáticas yace oculta en algún lugar entre las raíces filosóficas del logicismo, el intuicionismo y el formalismo*". E. Snapper.



Gottlob Frege (1848-1925) hizo su doctorado en Gotinga con una tesis sobre la fundamentación de la geometría. Fue profesor de la Universidad de Jena durante toda su vida y uno de los fundadores de la lógica simbólica. Tocó todas las áreas de las matemáticas de su tiempo, pero sus escritos más importantes están en la filosofía y en la lógica.

5.6. – Frege, Russell y el Logicismo.

Veíamos cómo las paradojas nos alertaban sobre el peligro que implica introducir en una teoría matemática conjuntos arbitrarios, o demasiado grandes que van a crear dificultades a la teoría. Esto ocurre, por ejemplo, con el conjunto **U** "de todos los conjuntos" o con el conjunto **W** de Russell[1], conformado por "los conjuntos que no se contienen a si mismos". Conjuntos como estos, generaron profundas paradojas en la naciente teoría de Cantor.

A Russell lo recordaremos en matemáticas, por su monumental obra *Principia Mathematica* (*Principios de las matemáticas*), escrita con Alfred North Whitehead, por su libro de divulgación The Principles of Mathematics[2] y por la paradoja que lleva su nombre. Esta paradoja tiene que ver con conjuntos que no se contienen a si mismos. Por ejemplo, el conjunto de todas las casas, no es una casa y así no se contiene así mismo. Sin embargo, el conjunto formado por todos los conjuntos que no son casas, se contiene a si mismo como elemento. El conjunto de las frases de cinco palabras contiene a la frase "las frases de cinco palabras", y así este conjunto se contiene así mismo. En general, todo conjunto está en una de las dos categorías: o en la clase **W** de los conjuntos que no se

[1] Ver mi artículo *Sobre Bertrand Russell y su paradoja*, en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/cronicaXVII010406.pdf.

[2] Aun en circulación: Russell, B. *The Principles of Mathematics*. W. W. Norton & Company. New York. 1996.

contienen a si mismos (conjuntos de Russell), o en la clase de conjuntos que se contienen a si mismos.

Llamemos **W** al conjunto formado por todos los conjuntos de Russell. Y aquí viene la pregunta que sacudió los mismos fundamentos de las matemáticas. ¿Es **W** un conjunto de Russell? O poniéndola más fácil: ¿**W** se contiene, o no, a si mismo? En sana lógica (aristotélica), la repuesta debe ser: si, o, no. Si la respuesta es si: **W** esta en **W**, implica que **W** es un conjunto de Russell y por definición **W** no está en **W**. Juntando cabeza y cola: si **W** está en **W** entonces **W** no está en **W**. ¿Cómo les parece esta contradicción? De otro lado, si la respuesta es no: **W** no está en **W**, entonces este conjunto no se contiene a si mismo, es decir, **W** está en **W**. Otra vez la contradicción. **W** no está en **W** implica **W** está en **W**. Las dos alternativas conducen a una contradicción y consecuentemente **W** no se deja clasificar ni como una cosa ni como la otra. Esto viola el sagrado principio aristotélico del tercero excluido: o se está, o no se está, en una parte.

La alerta que ponen las paradojas, nos llama a reflexionar sobre aquello que hoy llamamos los fundamentos de las matemáticas. Frege intentó poner sobre bases sólidas la estructura de las matemáticas con el recurso de la lógica, buscando definir en forma razonada conceptos que, como el de número, se aceptaban a priori, como caídos del cielo y no sujetos a un examen riguroso en cuanto a su existencia. Con la aparición de los cardinales transfinitos, aparecieron también, un sin número de paradojas, que vinieron a complicar la situación de la fundamentación de las matemáticas.

Frege y Russell buscaron con el recurso de la lógica, hacer depender las matemáticas, de principios lógicos, y de la naciente teoría de conjuntos. Indudablemente conjuntos como, **U** y **W**, mencionados arriba, no son buenos candidatos para incluirlos en una teoría axiomática de conjuntos, en razón a las paradojas que generan. Sin embargo, si nuestra teoría se limita a conjuntos no tan abstrusos como estos, nuestro programa puede funcionar. En efecto, Russell introduce la *teoría de tipos* con el propósito de afianzarse en ella a fin de desarrollar una teoría de conjuntos que no origine problemas estructurales. *La teoría de tipos* busca clasificar los conceptos según el tipo; específicamente, los números, por ejemplo, que son elementos básicos en las matemáticas, son de primer tipo. Los enunciados relativos a números son de tipo 2. Si el enunciado afirma algo sobre colecciones ya será de tipo 3 y así sucesivamente. En los *Principia*, Russell acepta enunciados de *tipo* **n** solamente relacionados con cosas de *tipo* estrictamente menor que **n**.

Con la teoría de tipos Russell previene la entrada a paradojas, al menos como aquella del mentiroso, por cuanto que, si el sistema permite enunciados del tipo: "este enunciado P es verdadero", nada nos impide afirmar también que: "Este enunciado P es falso" y crear allí la paradoja[3]. Sin embargo en teoría de tipos estos enunciados no son posibles porque se estaría afirmando algo sobre elementos del mismo nivel. Así que paradojas de este tipo no se darán aquí.

Según algunos matemáticos, entre ellos Henri Poincaré (1854-1912) y Bertrand Russell, una de las características de las paradojas en la teoría de conjuntos es que en cada una de ellas aparecen definiciones circulares en el sentido de que la definición del conjunto se expresa en términos de sus elementos y éstos en términos del conjunto. Esta circularidad o círculo vicioso está en el centro de las paradojas. Como ya mencionábamos a propósito de la paradoja de Russell, nuestras teorías matemáticas no deben albergar paradojas, por cuanto las contradicciones dentro de ellas vuelven

[3] Esta paradoja se estudió en detalle en la pasada sección. Una descripción general de la paradoja de Epiménides y de paradojas afines se encuentra en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/Cronica%20XX.pdf

inconsistente la teoría, como mostramos en sección anterior. Es decir, la teoría pierde su credibilidad, porque dentro de una teoría tal, se puede deducir lógicamente cualquier cosa, incluyendo absurdos y contra-sentidos.

El mayor abanderado del logicismo, o sea, del programa de reducir las matemáticas a un capítulo de la lógica, fue indudablemente Russell, como puede comprobarse principalmente a través de sus dos obras *The Principles of Mathematics* y *Principia Mathematica*, esta última con A. N**.** Whitehead. En los *Principia* (nombre corto para *Principia Mathematica*) se encuentra la restricción siguiente "Ninguna totalidad puede contener miembros definibles solamente en términos de esta totalidad, o miembros que impliquen o presupongan esa totalidad". Este principio restrictivo buscaba la exclusión de definiciones circulares en las matemáticas y de allí, prevenir la aparición de las preocupantes paradojas. Hay que anotar aquí que, paradojas como la de Banach-Tarski, no dependen de una definición circular y si, de la deficiente definición del concepto de volumen, puesto que no se conoce una definición de volumen lo suficientemente amplia que cubra también a objetos tan dispares como sólidos de tipo fractal o sólidos que resulten de grupos de rotación con extrañas propiedades.

El logicismo buscaba reducir las matemáticas a la lógica formal, en el sentido de trasladar las verdades matemáticas a verdades lógicas, y los teoremas matemáticos, interpretarlos como un subconjunto propio de los teoremas de la lógica. O en palabras de Russell, la meta del logicismo es "mostrar que todas las matemáticas puras se siguen de premisas puramente lógicas y que éstas usan solamente conceptos definibles en términos lógicos".

A partir de este punto seguiremos muy de cerca un artículo de Ernst Snapper publicado hace algunos años por la MAA[4], en el que se describe y analizan las tres escuelas que tuvieron que ver con la fundamentación de las matemáticas: *Logicismo, formalismo e intuicionismo*. Snapper nació en Holanda en 1913 y es de la misma cosecha de grandes matemáticos de ese país, como el aquí ya nombrado, B. L. van der Waerden (1903-1996); el historiador de las matemáticas Dirk J. Struik (1894-2000) y el fundador de la escuela intuicionista L. E. J. Brouwer (1881-1966). Después de estudiar en la Universidad de Princeton, Snapper, siguió de profesor en esta institución por algunos años antes de vincularse a otras universidades norteamericanas. Otra contribución interesante de Snapper (¿*Qué son las matemáticas?*) se puede leer en el Monthly de la *Mathematical Association of America* [5].

Los trabajos de Gottlob Frege (1848-1925) de alrededor de 1884 dan inicio a la escuela del logicismo. Empezando el siglo XX Russell y Whitehead retoman la iniciativa de Frege de mostrar que las matemáticas clásicas, al menos las que se conocían hasta ese tiempo, podían considerarse como parte de la lógica. Para sustentar esta tesis se debía dar respuesta a preguntas como ¿Por qué las matemáticas clásicas están libres de contradicciones?, que origina una pregunta similar en la lógica ¿Por qué la lógica está libre de contradicciones? Desde luego que antes de intentar responder a estas preguntas se debe responder a preguntas más simples como ¿Qué son las matemáticas clásicas?, o ¿Qué entendemos por lógica? Las respuestas que hoy damos a estas preguntas no son, desde luego, las mismas de Frege y Russell, porque el desarrollo de las matemáticas en el siglo XX fue asombroso y el alcance de las mismas posiblemente se aleja demasiado de los presupuestos tenidos en cuenta por los logicistas tradicionales.

---

[4] SNAPPER, Ernst, *The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism, and Formalism,* Mathematics Magazine Vol. 52, Sept. 1979. Págs. 207-216.

[5] SNAPPER, Ernst. *What is mathematics?* The American Mathematical Monthly. No. 7. Vol. 86. 1979. Págs. 551-557.

Las matemáticas clásicas podemos entenderlas como aquellas a las que se referían Russell y Whitehead en los *Principia* (cuyo primer volumen apareció en 1910) y que tiene como objeto central de estudio, la teoría formal de conjuntos. Aunque la formalización no llegó a completarse, los autores pensaron en utilizar este trabajo como soporte en su programa de reducir las matemáticas a la lógica. Ellos demostraron que todas las matemáticas clásicas podían derivarse de la teoría de conjuntos y así de los axiomas de los *Principia*. Lo que restaba por hacer era, mostrar que todos los axiomas de los *Principia* pertenecen a la lógica. Por razones pedagógicas se puede usar otro sistema formal de teoría de conjuntos, como el de Fraenkel-Zermelo-Skolem (FZS) en lugar del sistema implícito en los Principia, sobretodo porque (FZS) tiene alrededor de una decena de axiomas que son más asequibles y más conocidos que los de los *Principia*. Con esto en mente, la meta del logicismo es ahora mostrar que los axiomas (FZS) pertenecen a la lógica. Para entender el logicismo es importante ver claramente qué significaban los logicistas, por lógica. La razón es que, independientemente del significado que le hubiesen atribuido, ciertamente pensaban en algo más que la lógica clásica. Hoy en día, uno puede definir lógica clásica en términos de todos *aquellos teoremas, que pueden probarse en lenguajes de primer orden*, sin el uso de axiomas no lógicos. Es decir, estamos restringidos a lógica de primer orden y a usar las reglas de deducción[6] y los axiomas de esa lógica. Un ejemplo de estos axiomas es la ley del tercero excluido, la cual dice que, si p es una proposición, entonces la proposición $[p \vee (\neg p)]$ es verdadera independientemente del valor de verdad de p. Aquí el símbolo $\vee$ representa el conectivo lógico "o inclusivo" y "$\neg$" es la conectiva valorativa de la negación.

Si la definición de lógica dada arriba hubiera sido la de los logicistas, no habría duda de que todo el sistema FZS se podría reducir a la lógica. Sin embargo, los logicistas tenían una definición más amplia, Su concepto de proposición lógica tenía una concepción de generalidad y su valor de verdad dependía únicamente de su forma y no de su contenido. Por esta razón la palabra "proposición" se usa como sinónimo de "teorema". Por ejemplo, la ley del tercero excluido es una proposición lógica por su generalidad y porque su valor depende de su forma y no de su contenido, ya que la proposición p puede referirse a matemáticas, física o a lo que uno quiera. Entonces aquí uno se pregunta, ¿por qué este principio se cumple? Los logicistas responden: en virtud de su forma, en el sentido de la sintaxis, o sea por el papel que juegan en la estructura de la proposición, los conectivos $\vee$ y $\neg$, el *o* inclusivo y la negación respectivamente.

De una parte, no faltan argumentos que muestran que todos los teoremas de la lógica clásica, como los definidos antes, son proposiciones lógicas en el sentido del logicismo. De otro lado, no hay una razón *a priori* para creer que no habría proposiciones lógicas fuera de la lógica clásica. Esta es la razón para sostener que la definición de lógica de los logicistas va más allá de la definición clásica de lógica. Es así, como el objetivo del logicismo se ve claro: éste se reduce a mostrar que los axiomas de FZS son proposiciones lógicas en el sentido del logicismo descrito antes. Para ubicarnos en el terreno que estamos pisando daremos, como referencia, algunos axiomas de la teoría de conjuntos FZS[7].

AXIOMAS DE *FRAENKEL* ZERMELO. Aquí presentamos una de las primeras axiomatizaciones de la teoría de conjunto originada en Ernst Zermelo (1871-1953). Esta axiomatización fue completada en 1922 por Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965) y por Thoralf Skolem (1887-1963).

[6] Para una descripción de estas reglas de deducción, ver: Caicedo, X. *Elementos de Lógica y Calculabilidad.* Una Empresa Docente. Universidad de los Andes. Bogotá, 1990. Ver también el final de la sección 5.4 de estas notas.
[7] Ver: DAWSON, J. W. Jr. *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel.* A K Peters. Boston. 2nd Ed. 2005. Págs. 116 y sgts.

Supongamos que se ha dado un conjunto universal o referente, cuyos elementos son objetos o conjuntos, y algunos entes (preelementos, *urelements*, en inglés) no necesariamente conjuntos, en el seno de los cuales se ha definido relaciones fundamentales del tipo $a \in b$, donde *a* es elemento y *b* un conjunto que lo contiene. En este universo se espera que se cumplan los siguientes axiomas.

I. Axioma de Extensionalidad. Si M y N son conjuntos tales que M $\subset$ N y N $\subset$ M (es decir si cada elemento de M es elemento de N y viceversa) entonces M = N. Esto significa que cada conjunto queda determinado por sus elementos.

II. Axioma de los Conjuntos Primitivos. Existe un conjunto (el conjunto vacío) que no posee elementos y un conjunto (conjunto unitario), tal que si *a* pertenece al dominio, $\{a\}$ tiene como único elemento a *a*. Si *a* y *b* son elementos del dominio existe el conjunto $\{a, b\}$ que contiene únicamente esos dos elementos.

III. Axioma de Separación. Siempre que la función proposicional $F(x)$, esté definida para todos los elementos *x* de un conjunto *M*, *M* posee un subconjunto de elementos *x* en *M* tal que $F(x)$ es verdadera.

IV. Axioma del Conjunto Potencia. A cada conjunto *M* corresponde otro conjunto (su conjunto potencia) cuyos elementos son todos los subconjuntos de *M*.

V. Axioma de la Unión. A cada conjunto *M* corresponde un conjunto, (*su unión*) cuyos elementos son todos los elementos de los elementos de *M*.

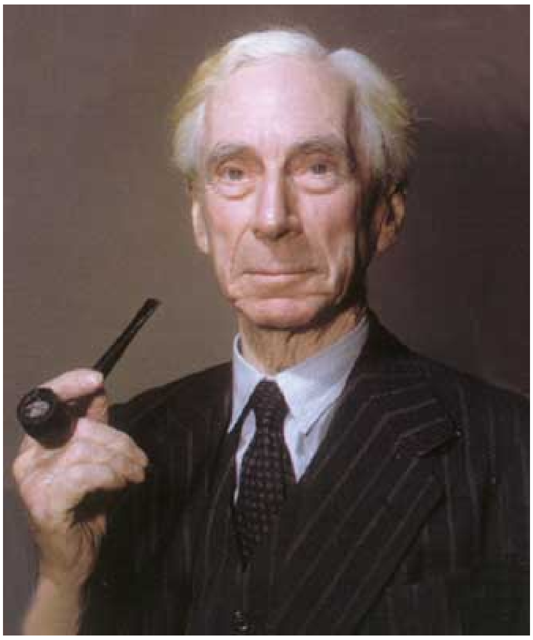
VI. Axioma de Elección. Si *M* es un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos y esos conjuntos son mutuamente disyuntos y no vacíos, entonces, la unión de *M* incluye, al menos, un subconjunto que tendrá uno y solo un elemento en común con cada elemento de *M*.

VII. Axioma del Infinito. Hay al menos un conjunto en el dominio que contiene al conjunto vacío como elemento y que contiene $\{a\}$ como uno de sus elementos, siempre que contenga a *a* mismo, como elemento.

La única forma de comprobar el éxito o el fracaso, en lo que al logro del objetivo del logicismo se refiere es, determinar si los axiomas FZS caen dentro del concepto de proposiciones formuladas por el logicismo. Se puede demostrar que al menos dos de estos axiomas, el axioma del infinito y el axioma de elección, no pueden considerarse como proposiciones lógicas. Por ejemplo el axioma del infinito dice que existen conjuntos infinitos. ¿Por qué podríamos decir que este axioma es verdadero? La razón es que todos estamos familiarizados con conjuntos infinitos, como los naturales, los puntos en el espacio euclídeo. Así aceptamos el axioma sobre la base de nuestra experiencia con conjuntos y esto claramente muestra que lo aceptamos en virtud de su contenido y no por su forma sintáctica. En general, cuando un axioma afirma la existencia de objetos con los cuales ya estamos familiarizados en razón a nuestra experiencia diaria, un axioma como éste, no es una proposición lógica en el sentido del logicismo.

Y aquí entonces, aparece la primera crisis de las matemáticas: Basta que dos de los axiomas de la teoría no se puedan acomodar en la estructura de la lógica, para afirmar que el propósito del logicismo de encontrar las bases de las matemáticas en la lógica, no se puede lograr. Sin embargo el logicismo ha sido de la mayor importancia para el desarrollo de la lógica matemática moderna. En efecto, fue a través del logicismo que empezó a hacerse lógica matemática en forma seria. Los dos cuantificadores, el universal $\forall$, y el existencial $\exists$, fueron introducidos en la lógica por Frege; y la influencia de los *Principia* de Russell en la lógica matemática, ya es parte de la historia de su desarrollo. Es de notar también, que el logicismo tiene fundamentos filosóficos. Por ejemplo, cuando los logicistas nos dicen, lo que significan ellos por una proposición, como se mencionó antes, usan lenguaje filosófico y no matemático, y así lo hacen porque el lenguaje filosófico hace de las definiciones, conceptos de más amplio espectro, que lo que pueden hacer las matemáticas.

La filosofía del logicismo, se dice, que se fundamenta en la escuela filosófica llamada "realismo". En tiempos medievales, la filosofía usó el término realismo para designar la doctrina platónica que sostiene que las entidades abstractas tienen una existencia independiente de la mente humana. Las matemáticas, por supuesto, están llenas de entidades abstractas tales como números, funciones, conjuntos, etc., y de acuerdo a Platón tales entidades existen fuera de nuestra mente. La mente puede descubrirlas, pero no crearlas. Esta doctrina tiene la ventaja de que uno, puede aceptar conceptos tales como, "conjunto", sin preocuparse en su posible construcción y así ocurre para con las otras entidades abstractas. Resumiendo: el realismo nos permite aceptar muchas más entidades abstractas en matemáticas que las que pueda permitirnos otra filosofía, que nos limitase a aceptar, solamente aquellas entidades que la mente humana pueda construir. Russell fue un realista en ese sentido y aceptó entidades abstractas que existen en matemáticas clásicas, sin cuestionar, si nuestras propias mentes pueden, o no construirlas. Esta es una diferencia fundamental en relación con la concepción filosófica intuicionista, dentro de la cual, las entidades abstractas se admiten, sólo si las mismas son susceptibles de poder construirse por la mente humana.



Bertrand Russell (1872-1970) buscó darle a las matemáticas una fundamentación desde el ángulo de la lógica. Su obra *Principios de las matemáticas* aparece como el primer intento serio de mostrar como las matemáticas pueden considerarse como una parte de la lógica. Obtuvo el Nobel de Literatura y de la Paz[8].

Siguiente Sección: *Brouwer, Heyting y el Intuicionismo*

[8] Foto tomada de Mac Tutor en: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Russell.html .