"Parece paradójico que el hombre busque mecanizar su razonamiento, lo más humano del hombre". D. R. Hofstadter.

En la sección anterior veíamos cómo Gödel introdujo los conjuntos construibles, definidos en términos de fórmulas en el lenguaje de la lógica y la teoría de conjuntos. Con esto en mente introduce un axioma en la teoría de conjuntos ZF que da acceso al axioma de elección y a la hipótesis del continuo, y aún más, a una generalización de esta misma hipótesis.

Una década después de los resultados mencionados, su posición en cuanto a los fundamentos cambia hacia un sentido más realista con relación a lo que el llamaba la vaguedad de las jerarquías infinitas. Con relación a CH, predijo que además de la consistencia, como él ya lo había demostrado, también se podría llegar a demostrar su independencia en el sistema Zermelo-Fraenkel-Axioma de Elección (ZFC). Esta demostración, sólo vino a conocerse en 1962, en un trabajo de Paul Cohen, quien fuera posteriormente medallista Fields en 1966 (al lado de M. F. Atiyah, A. Grothendieck y S. Smale). Gödel en sus trabajos de esta época insinuaba que la independencia de CH, no debía entenderse como el fin de la historia en este capítulo del estudio de los fundamentos, si no al contrario, hacía la predicción:

> "… el problema del continuo… finalmente conducirá al descubrimiento de nuevos axiomas, que harán posible refutar la hipótesis de Cantor".

Gödel especulaba que la clase de axioma que se prestaría para completar la prueba podría ser el llamado *Axioma del cardinal mayor*, esto es, un axioma no probable en ZF que implica la existencia de niveles de tamaño descomunal en la jerarquía acumulativa de conjuntos. Sin embargo, debido a la gran aplicabilidad de los métodos de Cohen, se descubrió que los axiomas de alta cardinalidad, por si mismos no podrían establecer CH. No obstante los resultados recientes de Woodin[1], sugieren que Gödel tenía razón. En 1951, Gödel volvió al tema y afirmaba lo siguiente:

> "El fenómeno de la inexhaustibilidad de las matemáticas… siempre está presente… Todas las matemáticas son reducibles a la teoría abstracta de conjuntos… ahora, si uno ataca el problema de la axiomatización de la teoría de conjuntos, el resultado es muy diferente de lo que podría esperarse… uno tiene que enfrentarse a una serie infinita de axiomas, los que pueden extenderse más y más sin que se vislumbre un final… ".

En esta tónica Gödel llegó hasta sugerir la insolubilidad de ciertos problemas centrales de las matemáticas como la hipótesis de Riemann y problemas relacionados con ecuaciones diofantinas.

Antes de enunciar el teorema de incompletitud, hagamos un repaso de los conceptos relacionados con sistemas axiomáticos y ligados a este teorema, que es bueno tener presente.

CONSISTENCIA. Un sistema se dice *consistente*, si sus axiomas no conducen a contradicciones. Digamos, que en el lenguaje formal del sistema, solamente se pueda probar p, o su negación, $\neg p$, pero no ambas.

[1] WOODIN, W.H. *The Continuum Hypothesis*. Notices of the American Mathematical Society, Part I, II, Vol. 48. 2001.

COMPLETITUD. Un sistema es *completo* si toda frase (fórmula bien formada) en el lenguaje asociado al sistema, se puede probar como verdadera, o como falsa. Esto significa que en el sistema están bien delimitadas las fórmulas inferibles de las que no lo son.

INDEPENDENCIA. Un enunciado p se dice *independiente en un sistema* S cuando ni p, ni tampoco, $\neg p$, se pueden deducir de los axiomas de S.

INDECIDIBILIDAD. Decimos que una proposición p es indecidible en un sistema S, si los axiomas no son suficientes para deducir de ellos, esta proposición o su contraria, $\neg\, p$.

Entre los aportes más importantes de Gödel está el teorema de incompletitud, cuya versión más fácil de recordar es:

TEOREMA DE INCOMPLETITUD. *Todas las formulaciones axiomáticas constistentes de la aritmética* (*teoría de números*) *incluyen proposiciones indecidibles*.

Para Hofstadter[2] el teorema de incompletitud es una verdadera perla, cuya ostra, metafóricamente hablando, corresponde a la prueba del teorema. El teorema en su simplicidad no deja entrever el *extraño bucle* inmerso en él. Estos bucles extraños corresponden en nuestro lenguaje corriente a paradojas como las ya estudiadas de Epiménides y de Russell. El término *bucle* es algo corriente en los programas de computador, cuando se quiere significar que dentro de él hay un subprograma reiterativo. La prueba del teorema reposa en la escritura de un enunciado matemático auto referente, en la misma forma que la paradoja del mentiroso reposa en un enunciado auto referente del lenguaje. Un enunciado más general y su demostración puede verse en: http://www.math.hawaii.edu/~dale/godel/godel.html#FirstIncompleteness .

Los números naturales, no deben confundirse con sus propiedades, ni con los enunciados referentes a estas propiedades. Un enunciado de teoría de números no puede ser un enunciado sobre propiedades de teoría de números. El golpe de genio del que hablábamos antes en Gödel, fue el hecho que, él vio aquello que el ojo corriente de los matemáticos no había notado, esto es, que las propiedades de los números naturales podían codificarse en el lenguaje propio de los números naturales. Este nuevo código se llama hoy, Código de Gödel, donde los números representan símbolos y sucesiones de símbolos. Así, a cada enunciado de la aritmética (teoría de números) se le asocia un número de Gödel que lo identifica en forma unívoca, lo que implica que cada cadena de símbolos en este lenguaje puede interpretarse en dos formas distintas: como enunciados de la aritmética o enunciados referentes a enunciados de la aritmética.

Después de establecer éste código se busca hacer el trasplante de la paradoja de Epiménides no precisamente diciendo “Este enunciado es falso”, si no a través del nuevo código diciendo: “Este enunciado de la teoría de números no tiene prueba”. Sin embargo la noción de prueba no es un concepto fácil de captar para el común de la gente. Aquí entenderemos por prueba el hecho de que el enunciado se derive de los axiomas con el recurso de las reglas de inferencia de la lógica. Pero, como lo hemos visto, las reglas de la lógica también tienen cabida en el lenguaje que ahora está codificado en los números de Gödel, así que los enunciados se podrán identificar con fórmulas del nuevo lenguaje. La prueba depende de los axiomas en consideración. Si tomamos como base la axiomatización hecha en los *Principia* de Russell y Whitehead, el enunciado de Gödel toma la

[2] HOFSTADTER, D. R. *Gödel. Escher, Bach: An eternal golden braid.* Random House. New York. 1980. Hay edición en español publicada por Alianza Editorial de España.

forma, llamémosla G: “Este enunciado de la teoría de números no tiene prueba en el sistema de los *Principia Mathematica*”.

El enunciado G no es el teorema de Gödel, como no lo es la paradoja de Epiménides la frase: “el enunciado de Epiménides es una paradoja”. Como recordamos, el caso de la exclamación de Epiménides no puede clasificarse ni como verdadera ni como falsa, pero para el caso de G la situación es diferente, porque G puede asociarse a una fórmula de nuestro lenguaje codificado de Gödel y ella es verdadera en el sentido de que es una fórmula bien formada, pero no es probable en el sistema determinado por los *Principia*. La conclusión es que el sistema de los *Principia* es incompleto porque hay enunciados de la aritmética, como G, que son verdaderos pero que la teoría resulta insuficiente para probarlos.

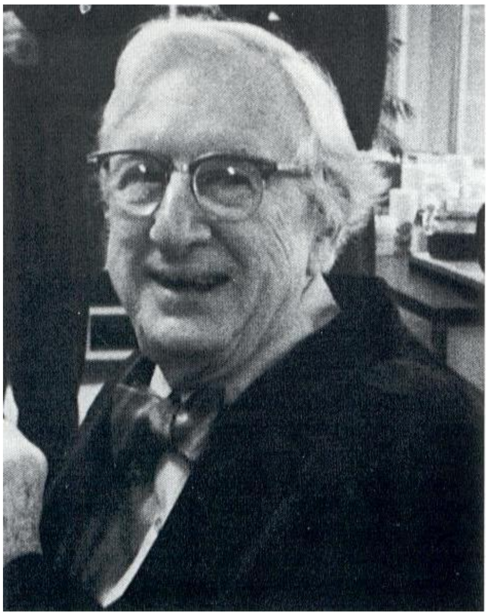
El teorema de Gödel tuvo consecuencias graves en el seno de los lógicos, matemáticos y filósofos interesados en los fundamentos de las matemáticas, porque con él se demostró que ningún sistema axiomático fijo, podía representar la complejidad que se deriva de la teoría de números. Después del teorema de incompletitud, el logicismo quedó muy mal parado, a tal punto que, el mismo Russell afirmaba que para él, la lógica le producía nausea. Pero Hilbert tampoco salió bien librado, por cuanto que su meta de probar en matemáticas, todo aquello que estuviera bien formulado, se fue posible lograrse. Como consecuencia de los teoremas de Gödel, el desafío de Hilbert restringido a la aritmética tampoco pudo lograrse. Su famosa frase: “En matemáticas no hay *ignorabimus*”, perdió su generalidad.

5.10 – La filosofía de las matemáticas después de Gödel.

Después de la aparición de los teoremas de Gödel, decíamos que, Russell manifestó su profundo desencanto con la lógica. Este desencanto también tocó a la filosofía de las matemáticas y en general a la filosofía, pues al descubrir lo escurridizo que resultaba el concepto de verdad[3], ninguna filosofía podía abrogarse el derecho de poseerla como patrimonio propio. Paralelamente a los resultados e investigaciones de Gödel, el círculo de Viena, del cual formaba parte el mismo Gödel, con Rudolph Carnap a la cabeza, buscaban un lenguaje universal y unificador para la ciencia. Esta escuela filosófica, que se apoyaba en la filosofía matemática preconizada por Bertrand Russell, se conoce como el positivismo lógico. Este lenguaje universal no pudo configurarse, pero el positivismo lógico tuvo logros importantes en cabeza de filósofos tan famosos como Ludwig Wittgenstein, Karl R. Popper y Rudolph Carnap y matemáticos de primera línea como Hans Hahn y el mismo Gödel.

Para terminar estas notas sobre los fundamentos de las matemáticas, quisiera comentar ligeramente el trabajo de dos matemáticos que propusieron alternativas nuevas en la filosofía de las matemáticas: los profesores Raymond L Wilder y Errett Bishop. Se nos queda por fuera, al menos por ahora el matemático checo y discípulo de Popper, Imre Lakatos (1922-1974) quien revivió al menos, en los últimos años de su vida, el interés por la filosofía de la ciencia, y en parte, algunas cosas interesantes en conexión con las matemáticas.

[3] Para el concepto de verdad en lenguajes formalizados ver el capítulo VIII de: Tarski, A. *Logic, Semantics, Metamathematics.* 2nd. Edition. Hackett Publishing Company. Indianapolis. 1983.



Raymond L. Wilder retratado por P. R. Halmos[4] en 1976. Wilder fue topólogo, antropólogo y un gran amante de la filosofía.

Raymond L. Wilder (1896-1982) fue conocido en la comunidad matemática por su producción intelectual, especialmente en topología (como que fue uno de los primeros discípulos del legendario maestro de maestros en matemáticas, Robert Lee Moore) y por su actividad interdisciplinaria, combinando matemáticas con las ciencias humanas, especialmente en conexión con la antropología. La posición filosófica de Wilder es, considerar las matemáticas como un sistema cultural. Como lo señala Smorynski[5], el conocimiento matemático es una tradición cultural y la actividad matemática tiene un carácter social. Las matemáticas se enseñan en todo tipo de cultura y es interesante destacar que la actividad matemática en su producción y desarrollo está muy ligada a los estamentos de carácter social, como universidades e institutos avanzados.

Para Wilder la cultura matemática se asemeja a una especie biológica que evoluciona y se acomoda y adapta según las fuerzas sociales que actúan sobre ella. Para citar un caso, muestra, cómo las matemáticas griegas al entrar dentro de la cultura musulmana evolucionaron de tal forma que cuando llegan de nuevo a occidente, la geometría y la teoría de números tenían un cierto toque de cultura árabe. Entre el decálogo de las leyes que según Wilder, gobiernan la evolución de los conceptos matemáticos, destaquemos las siguientes[6]:

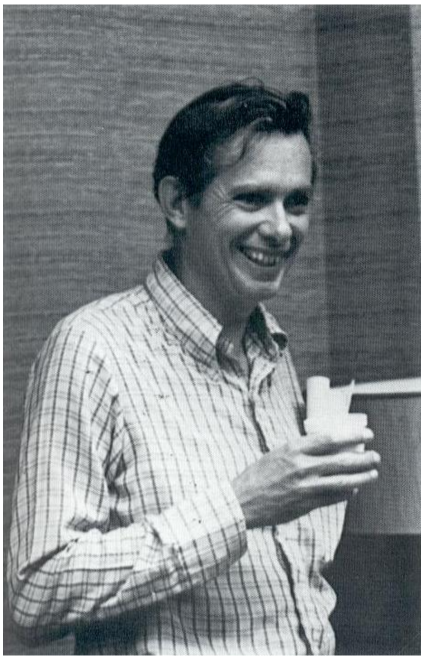
a) En todo tiempo sólo evolucionarán los conceptos relacionados con la cultura matemática existente, buscando su mayor utilidad según las presiones de esta misma cultura o de culturas en las cuales las matemáticas encuentran arraigo.

b) La admisibilidad y aceptación de un concepto están decididos por su grado de utilidad. En particular, un concepto no se rechaza en razón a su origen o por motivos metafísicos, como su “irrealismo”, por ejemplo.

---

[4] HALMOS, P. R. *I have a Photographic Memory.* American Mathematical Society. Providence, RI. 1987.
[5] SMORYNSKI, C. *Mathematics as a Cultural System.* The Mathematical Intelligencer, Vol. 5. No. 1. 1983.
[6] WILDER, R. L. *Evolution of Mathematical Concepts.* John Wiley and Sons, Inc. New York, 1968. Págs. 207-209.

c) La evolución de las matemáticas continúa siempre; permanentemente en ascenso, sólo sujeta a las presiones de difusión o de decaimiento de la cultura donde arraiga.



Errett Bishop (discípulo de Paul R. Halmos y también retratado por él) hizo su tesis en teoría de operadores, pero según Halmos se dedicó a una “religión” conocida como constructivismo.

Errett Albert Bishop (1928-1983), un matemático formado dentro del llamado “hard analysis” (análisis duro) de los epsilons y los deltas, discípulo de Paul R. Halmos, reabre de nuevo, en la década de los años sesentas del siglo pasado, el camino hacia el eonstructivismo, aquel enfoque de las matemáticas que a fines del siglo XIX, había iniciado Kronecker, en contravía a los procesos de aritmetización del análisis iniciados por Weiersstrass y Cantor. Alrededor de 1920 Brouwer y sus discípulos a través del enfoque intuicionista intentaron desarrollar el análisis por métodos constructivistas, sin mayor éxito.

La aproximación al constructivismo por parte de Bishop, no es filosófica, sino más bien diríamos, está motivada desde el interior del análisis. La idea era salir del patrón estandarizado de la teoría de conjuntos y reemplazarlo por un nuevo paradigma como es el constructivismo. El objetivo central de su programa era reemplazar las pruebas conjuntistas de los teoremas del análisis, por pruebas esencialmente constructivistas, donde los objetos matemáticos que entran en el proceso deben ser construidos en forma algorítmica y su existencia no puede darse por sentada sino hasta que se conozca un procedimiento para construir tales objetos. Los seguidores de esta versión de escuela constructivista, ya no son, necesariamente lógicos o filósofos interesados en los fundamentos del análisis, sino matemáticos de áreas como álgebra, topología o análisis. La obra principal de Bishop[7] llegó a constituirse en texto en algunas universidades, aunque en nuestros días ya no circula y solamente se consiguen copias para coleccionistas. Para un análisis de la obra de Bishop en forma condensada, puede verse el artículo de N. D. Goodman[8].

---

[7] BISHOP, E. *Foundations of Constructive Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1967.
[8] GOODMAN, N. D. *Reflexions on Bishop's Philosophy of Mathematics.* The Mathematical Intelligencer, Vol. 5, No. 3, 1983.