¿Cómo aprendemos Matemáticas? Julio 2009

En el "Ángulo de Devlin"

La Columna de Keith Devlin en la MAA[1].

Traducida y anotada por Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío.*

"Dios hizo los enteros; todo lo demás es obra del hombre." Probablemente una de las citas más famosas de todos los tiempos. Su autor fue el matemático alemán Leopold Kronecker (1823-1891). Aunque algunas veces interpretada (erróneamente) como una afirmación teológica, Kronecker pensaba articular un impulso intelectual que dominaba una parcela muy amplia de las matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX, tendiente a reducir el sistema de los números reales, primero a los números enteros y posteriormente a la lógica formal. Kronecker estuvo motivado principalmente por el deseo de colocar el cálculo infinitesimal sobre "bases lógicas consistentes", sin embargo tomó muchos años lograr esa meta. El paso decisivo, desde la perspectiva de los sistemas numéricos, fue la formulación por parte del matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) de un conjunto de axiomas (más precisamente, un esquema de infinitos axiomas) que determina la estructura aditiva de los números enteros positivos. (El resto del proceso de reducción mostraba cómo los números podían ser definidos dentro de la teoría abstracta de conjuntos, la cual a su vez podía ser reducida a la lógica formal.)

Mirado esto como un todo, es una pieza impresionante de trabajo, uno de los mayores logros intelectuales de la humanidad, dirían algunos. Yo soy uno de ellos; en efecto, fue ese trabajo con mucho, que me condujo a la preparación de mi tesis de grado de Ph. D. – y mucha de mis investigaciones posteriores – en lógica matemática, con especial énfasis en teoría de conjuntos.

La lógica matemática y la teoría de conjuntos son dos, entre un grupo de tópicos, entendidos generalmente como "Fundamentos de las matemáticas." Al empezar mi trabajo de posgrado, el mundo matemático estaba atravesando otra completa serie de "crisis de los fundamentos," en ese caso el

[1] La columna aparece originalmente en:
http://www.maa.org/devlin/devlin_12_08.html

descubrimiento[2], por parte de Paul Cohen en 1963, relacionado con cuestiones relacionadas con el conjunto de los números reales que la teoría de la prueba no sabía responder (sobre la base de los axiomas aceptados.)

Hubo algo extraño en todas estas crisis. (Una primera se dio cuando Bertrand Russell en 1902 encontró una paradoja, que deshizo el intento de Frege de fundamentar las matemáticas en la teoría elemental de conjuntos.) Mientras la comunidad matemática no dudó en reconocer la importancia de estos nuevos descubrimientos como tales (a Cohen le dieron la Medalla Fields en 1966 por su teorema), los matemáticos no modificaron ni una jota su práctica diaria. Continuaron igual que antes.

Es, por tanto, una rara noción de “fundaciones”[3] que, no importa cuanto ellas se sacudan o aun se vuelvan insostenibles y eventualmente se reemplacen por otras, la vida en el edificio supuestamente construido sobre ellas sigue como si nada hubiera pasado.

Hay algo más extraño acerca de estos fundamentos particulares también. Ellos fueron construidos *después* de que las matemáticas, supuestamente, estaban edificadas encima de ellos.

¿En que sentido, entonces, la lógica formal, la teoría abstracta de conjuntos, los axiomas de Peano y todo lo demás, se constituyen en la base fundamental de las matemáticas? La respuesta – claro para todos nosotros quienes vivimos en el mundo moderno de las matemáticas hace bastante tiempo – es que ellos son el comienzo de una cadena lógica de eslabones, donde cada uno de ellos – o cada nuevo piso del edificio, si usted prefiere la metáfora de la construcción implicada en la palabra fundamentos – que, si usted sigue adelante o hacia arriba lo suficiente, eventualmente se recorre todo el espectro de las matemáticas.

Mirando en retrospectiva, la mayor parte de los cursos que recibí cuando estudiante, y los muchos más que he dictado por varias décadas a estudiantes de matemáticas y a estudiantes graduados, han seguido la misma estructura lógica implícita en el enfoque fundacional. Comienzo con lo básico – las definiciones y los axiomas – y entonces construyo todo basado en eso. Es como una vista sintética de las matemáticas. Entre eso cursos dictados, hubo uno “Análisis Real”, el que comienza con unos principios específicos, se construye el concepto de continuidad y los elementos básicos del cálculo diferencial e integral. Ocasionalmente hago notar, cuan inapropiado es el término de “análisis” para un curso que es enteramente sintético. Pero sé cual es la razón histórica para tal nombre. El tema apareció como resultado del esfuerzo al analizar el sistema de los números reales.

---

[2] La independencia de la Hipótesis del Continuo (CH). Más exactamente probó que si la teoría de conjuntos de Fraenkel-Zermelo junto al Axioma de Elección (ZFC) es consistente, también lo será la teoría ZFC + ($\neg$ CH).

[3] En inglés se usa la palabra *foundations* en dos sentidos: en español, el primero como fundamentos en el sentido teórico, el segundo como fundaciones para significar las bases de un edificio o una construcción.

Pero si ese es el caso, y realmente lo es, entonces ¿por qué no lo enseñamos típicamente de un modo que siga el desarrollo histórico? En otras palabras, ¿por qué no lo enseñamos como un proceso de análisis (a partir de la noción intuitiva del continuo de la recta real con una estructura aritmética)? Bien, algunos profesores lo hacen así o al menos tratan. Pero la mayoría no lo hacemos, y la razón, personalmente creo, es que es más simple y eficiente seguir la estructura lógica-matemática inherente, que seguir el hilo histórico.

"Las nociones intuitivas sobre la continuidad, digamos, que tenía la gente de antes, eran equivocadas," muchos dirán. "Así ¿por qué desperdiciar tiempo escarbando en las cenizas de la historia? Demos a nuestros estudiantes las definiciones correctas y adelante." Eso está bien para mí, como estudiante y como profesor, y aplica para la mayoría de nuestros colegas. En el proceso de llegar a ser un profesional, sin embargo, buena parte de mis compañeros estudiantes quedaron en la vía. El enfoque que trabajó para mí, parece no haber funcionado para todo el mundo.

En años recientes en mi profesión, me he interesado más en el tema de la cognición matemática. (Justamente dieciséis años separan la publicación en 1984 de mi pesado tomo *Constructibility*[4], tan sintético y fundacional, si se quiere, de mi más asequible (espero) libro, *The Math Gene*, donde hago un recuento evolutivo del desarrollo de la habilidad matemática del cerebro humano.) Este cambio de foco me ha llevado a reflexionar sobre la relación entre el enfoque sintético prevalente que domina en la enseñanza universitaria y de posgrado, y el desarrollo histórico/cognitivo, tanto del *homo sapiens*, como especie, como de los niños pequeños que aprenden matemáticas.

En ambos casos, en el desarrollo evolucionista cognitivo y en el aprendizaje matemático, mis reflexiones han sido de necesidad, como lo hace un observador, aunque como aquel que ha gastado su vida profesional en su dominio de interés con pocas matemáticas. No soy un antropólogo cultural ni un biólogo evolucionista, no he sido entrenado tampoco en los métodos de la sicología cognitiva. Mi única experiencia en enseñanza elemental se reduce a haber servido como recipiente del proceso, más allá de lo que puedo recordar. Sin embargo, en los pasados veinte años he leído toneladas de investigaciones en todos los dominios – suficientes como para notar que sabemos muchísimo menos de cómo el cerebro construye las matemáticas, de cómo este adquiere esta habilidad, y de cómo los niños la aprenden, que lo que nosotros hacemos con las matemáticas mismas.

Efecto de esa carencia de conocimiento científico corriente sobre estos temas es una consecuencia obvia: ¡no sabemos cuál es la mejor forma de enseñar las matemáticas!

"Bien, no es ninguna sorpresa", diría usted.

No realmente. No me refiero a cómo introducir tópicos particulares, o si es importante que los estudiantes manejen el algoritmo de la división. Es mucho

[4] **Constructibility (Perspectives in Mathematical Logic) (Hardcover)** by **K. J. Devlin**. Springer-Verlag. 1984.

más fundamental que eso. ¡No sabemos en que visión de las matemáticas basar nuestra instrucción! En efecto, por la cantidad de e-mails que recibo, muchos educadores de Estados Unidos desconocen que existe otra alternativa diferente a la que automáticamente asumimos (implícitamente) y usamos.

La aproximación prevalente en Estados Unidos, la misma implícita en la forma en que me enseñaron matemáticas, es que el principiante abstrae los conceptos matemáticos de su diaria experiencia. Hasta donde sé, ésta fue la forma cómo, el concepto de número entero positivo apareció en Sumeria entre los años 8000 y 5000 A. C. (Yo describo esta fascinante historia en mis libros: *Matemáticas: La Ciencia de los Patrones* y en *El Gen Matemático.*) La asunción detrás del currículo estándar en matemáticas que se sigue en la educación básica (K-12) de Estados Unidos es que los estudiantes construyen sobre sus propias intuiciones, sobre sus abstracciones de su propio mundo real, un entendimiento de los números naturales, para desarrollar conceptos y procedimientos, para manejar fracciones y números negativos – el orden exacto de introducción aquí no es muy claro – y entonces eventualmente los números reales. (El sistema de los números complejos, el “punto final” del desarrollo desde una perspectiva matemática, se deja para el nivel universitario. Volveré a los números complejos más adelante.)

Dije “el currículo matemático estándar de Estados Unidos” en el párrafo anterior. Hace algunos años, la geometría fue una parte también estándar del currículo, pero fue abandonada para concentrarse en los sistemas numéricos y en el álgebra, supuestos más importantes para la vida en la sociedad actual. Volveré también sobre esto más tarde.

Esta apreciación de la forma de adquirir habilidad y conocimiento matemático está implícito en la narración que dí en *El gen Matemático* y está implícito en la obra de Lakoff y Núñez: *¿De Donde Provienen las Matemáticas*?, aunque publicado justo después del mío por la misma editorial y en apariencia como su secuela, fue escrito en forma independiente, pero al mismo tiempo.

Confieso que, como fan de la metáfora de Lakoff, y una vez colega de Núñez, la primera vez que leí el libro estuve entusiásticamente de acuerdo en la totalidad de lo que ellos decían. Pero después de reflexionar, de una segunda y tercera leídas, y de discusiones sostenidas con colegas – particularmente con el especialista Israelí en educación matemática Uri Leron – me asaltaron las dudas. El paisaje que Lakoff y Núñez pintaban de la adquisición de los nuevos conceptos matemáticos y del conocimiento, como una construcción iterada de metáforas, donde cada nuevo concepto se crea sobre la base de un cuerpo de conocimiento ya adquirido a través del recurso de la construcción de nueva metáforas.

Pero, Lakoff y Núñez no postulan que estas metáforas – aplicaciones de un dominio a otro – son deliberadas o conscientes, aunque algunas pueden ser. En su lugar, ellos buscan describir un mecanismo por el cual el cerebro, como órgano físico, extiende o enriquece sus dominios. Mi problema, y de otros a quienes les planteé esto, era que los procesos descritos por ellos en el libro, aunque plausibles (y por supuesto correctos) para la forma en que aprendemos aritmética elemental u otras partes de las matemáticas básicas, en nada se parece a la forma en que (¿algunos?, ¿muchos?, ¿la mayoría?,

¿todos?) los matemáticos profesionales aprenden un nuevo campo avanzado de matemáticas abstractas.

Más aun, un matemático (al menos yo y otros a quienes he preguntado) aprende nuevas matemáticas en la misma forma que la gente aprende a jugar ajedrez. Primero aprende las reglas. Esas reglas nada tienen que ver con la experiencia diaria. No hay un sentido para ellas. Ellas son precisamente las reglas del ajedrez y nada más. Para jugar ajedrez, usted no tiene que entender las reglas o saber de dónde vienen o qué “significan”. Uno simplemente las sigue y las respeta. En nuestros primeros intentos al jugar, seguimos las reglas ciegamente, sin siquiera saber o entender que estamos haciendo. Y, al menos que estemos jugando con otro aprendiz, nos van a dar jaque-mate. Pero entonces, después de que hemos jugado varias partidas, las reglas empiezan a tener sentido para nosotros – empezamos a *entenderlas.* No en términos de algo de la realidad cotidiana o de nuestras experiencias previas, sino en términos del juego mismo. Eventualmente, después de que hemos jugado muchas partidas, las reglas se olvidan y lo que hacemos es jugar ajedrez y esto ya tiene significado para nosotros. Los movimientos se vuelven consistentes en términos del juego. Pero esto no es un proceso de construcción de metáforas. Al contrario es un *atrapamiento cognitivo* (en mis propios términos, es como construir una imagen con nuestro propio esfuerzo), donde hacemos uso del hecho de que, a través de un esfuerzo consciente, el cerebro aprende a seguir unas reglas arbitrarias y carentes de sentido, y entonces, después que nuestro cerebro tiene suficiente experiencia en el trabajo con estas reglas, él empieza a darles sentido a las mismas y ellas adquieren un significado para nosotros. (Al menos eso ocurre si esas reglas se formulan y se juntan en una forma con estructura que capacita para ello.)

Así, como he dicho, es la forma como yo, y (al menos algunos, sino la mayoría) otros matemáticos profesionales, aprenden nuevas matemáticas. (Por seguro, no en todos los casos. Algunas veces vemos desde el comienzo cómo es el nuevo juego.) A menudo, después que hemos aprendido la nueva teoría de una manera guiada por las reglas, podemos asociar o ligar a cosas que conocemos previamente. Podemos, en otras palabras, construir una ligazón entre esto y cosas que hemos conocido previamente. Esto sólo es posible cuando hayamos hecho la captura mental de la que hablamos antes. Pero no es como lo hemos aprendido. Similarmente, jugadores expertos de ajedrez a menudo describen su juego en términos de metáforas militares, usando términos como “amenaza”, “avance”, “retroceso”, y “reforzar”, por ejemplo. Pero nada de esto tiene sentido para un aprendiz del juego. La metáfora del mundo real aquí depende del entendimiento medianamente avanzado del ajedrez, pero no conduce a eso.

Bien, hasta aquí, el tema se asemeja a una interesante discusión de cafetería universitaria. Pero aquí está el problema. Si el aprendizaje de las matemáticas avanzadas es más parecido al aprendizaje del juego de ajedrez, que a cómo se aprende a caminar, a jugar tenis o a montar bicicleta – donde uno comienza con nuestras habilidades naturales y las refina y practica – ¿en que punto del currículo matemático desde el kinder a la educación universitaria se da el cambio hacia esta nueva forma de aprendizaje?

Lerón a quien ya mencioné, y otros, han producido evidencia que ciertamente comienza – o ha comenzado – cuando el estudiante encuentra el concepto de función matemática. Como Leron y otros, han mostrado, una proporción significante de estudiantes universitarios de matemáticas no tienen el concepto correcto de función.

Y usted ¿si lo tiene? Aquí tiene un test simple. (Éste es mucho más simple que los propuestos por Leron.) Considere la "función duplicadora" $y = 2x$ (o, si prefiere con más sofisticada notación $f(x) = 2x$). Pregunta: Cuando usted comienza con un número, ¿Qué le hace esa función a ese número?

Si usted respondió, "lo dobla", usted está equivocado. No, no vaya ahora a decir cosas como: "Bien, lo que quería decir realmente era …" Su respuesta original es incorrecta, y muestra que si aun usted conociera la definición correcta, el concepto de función que maneja es equivocado. Las funciones, como se definen y se usan todo el tiempo en matemáticas, no hacen nada a ninguna cosa. Ellas no son procesos. Ellas relacionan cosas. La "función duplicadora" relaciona el número 14 con el número 7, pero ella no le hace nada al número 7. Las funciones no son procesos sino objetos en el dominio matemático. Un estudiante que aun no ha captado enteramente e internalizado eso y para quien el subyacente concepto de función es un proceso, va a tener problemas con el cálculo, donde las funciones se tratan definitivamente como objetos que usted hace que hagan cosas – al menos algunas veces usted hace a estas funciones cosas; con frecuencia usted aplica otras funciones a ellas, así no hay acción, sino asociación. Note que no estoy sosteniendo, ni tampoco Leron lo hace, que aquellos estudiantes no entienden la diferencia entre las dos alternativas posibles de la noción de función, o que no entienden el concepto correcto (por definición acordada). La cuestión es, ¿cuál *es* su concepto de función?

Esta no es una cuestión trivial. Como los matemáticos han aprendido a lo largo de centurias, las definiciones son importantes. También las distinciones sutiles importan. Los conceptos importan y el tener los conceptos claros y correctos es fundamental. Si usted hace un pequeño cambio en una de las reglas del ajedrez, por ejemplo, estará frente a un juego distinto, al igual que en el (basado en reglas) juego de las matemáticas. En ambos casos los juegos resultantes es probable que sean insulsos e inútiles.

Okay, hemos tocado un tema del currículo matemático, las funciones, y encontramos que mucha gente – sospecho que la mayoría – tiene un concepto "incorrecto" de función. Pero "incorrecto" aquí significa que este no es el mismo que emplean los matemáticos (en cálculo y en todo lo que se fundamenta en el, lo que cubre la mayor parte de la ciencia y la ingeniería; así no estamos hablando de algo irrelevante.) ¿Es realmente un problema si la mayoría de ciudadanos se imaginan a las funciones como procesos? Bien, es un problema que ellos tendrán que superar si desean seguir adelante y aspirar a ser científicos, ingenieros o algo parecido, y como Leron y otros estudios lo sostienen no es fácil cambiar un concepto ya adquirido por otro, cuando el primero se ha internalizado y asimilado. Pero ¿qué pasa con el resto; aquellos quienes no van a la universidad a estudiar una carrera científica?

El tener un concepto incorrecto de función no sería problema para la mayoría de la gente, pero el concepto de función es apenas un ejemplo simplemente. No hemos respondido la pregunta original: ¿Dónde la enseñanza basada en la experiencia diaria y desarrollada a través metáforas iteradas termina y comienzan las otras matemáticas basadas en reglas que hay que asimilar?

¿Qué pasa con las matemáticas que hay que asimilar a fin de dominar apropiadamente, si ellas contienen a los números reales? ¿Y si incluyen a los enteros negativos? ¿Si incluye el concepto de multiplicación (un tema al que le dediqué tres recientes columnas)? ¿Qué pasará si enseñamos la multiplicación como una suma abreviada, o introducimos los números negativos a través de la metáfora de las deudas y que llevan a un concepto errado que va a incrementar la dificultad de aprendizaje cuando el niño necesite avanzar en matemáticas?

Aun si existiera un problema posterior en la línea educacional, ¿habrá algo que podamos hacer? ¿Hay alguna otra alternativa distinta a la de usar la vía de la "abstracción de la experiencia diaria" que se acepta como la única en Estados Unidos para la enseñanza entre kinder y el grado 8? ¿Es esa la única forma realmente de enseñar matemáticas a los niños? Bueno y si no, ¿es ésta la mejor forma, cuando se busca que el mayor número posible de niños permanezca siguiendo el hilo de las matemáticas?

Por supuesto, las últimas y más sorprendentes preguntas: ¿Aplica a la educación matemática la famosa frase de Kronecker? ¿Es comenzando con los números de contar, la mejor y la única forma de enseñar matemáticas a los niños en el mundo de hoy?

Responder a estas preguntas será el objetivo de la columna de Enero de 2009[5], donde además diré algo de los números complejos y de la geometría en la educación matemática, refiriéndome a la educación que se practica en Estados Unidos.

Y dicho sea de paso, no estoy preconizando en particular ninguna filosofía de la educación matemática. Como lo he sostenido en otras ocasiones, no estoy entrenado, ni tengo resultados experimentales de primera mano en educación matemática a nivel elemental. Pero puedo y he leído las palabras de aquellos que tienen la experiencia debida. Al menos distintas experiencias se han llevado a cabo en otras partes del mundo por personas profesionales en el ramo, y hay evidencia para sustentar que esta alternativa podría superar a la que practicamos aquí. Observe que dije "podría superar". La evidencia es buena, pero no hay aun la suficiente, y es como ocurre a menudo, interpretada amaneradamente en sus resultados como ocurre en educación. Pero tomo esa evidencia como una indicación que amerita al menos su discusión y valoración como un enfoque alternativo, aun si comenzamos con algo de escepticismo. Por cierto, hasta donde sé, la comunidad en educación matemática en los Estados Unidos ha actuado como si esta diferente alternativa ni siquiera existiera. Esto puede deberse simplemente, por

[5] Esta columna aparece traducida en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Filosofia/Matemáticas%20Experimentales.%20Marzo%2009.%20Devlin.pdf

supuesto, en palabras del guarda en la película clásica de Paul Newman *Cool Hand Luke*[6], a una falla en la comunicación. (Sea entre una parte del mundo y la otra, o entre nuestra comunidad matemática educativa y el resto de nosotros.) Si esto es así, lo que busco es tratar de reparar esa falla.

[6] El título de la película en español es *La leyenda del Indomable* (1967) con la dirección de Stuart Rosenberg.