¡Cuando la evidencia nos engaña! La Conjetura de Mertens. Septiembre 2009

En el "Ángulo de Devlin"

La Columna de Keith Devlin en la MAA[1].

Traducida y anotada por Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío.*

Unos pocos minutos de cálculo numérico nos muestran que el polinomio cuadrático

$$f(n) = n^2 + n + 41$$

Genera números primos para valores de n = 0, 1, 2, 3,…, 39. Esto nos da una sucesión de cuarenta primos en línea. Esto parece haber sido descubierto por Leonhard Euler en 1772. Sabiendo que las matemáticas son la ciencia de los patrones, estamos tentados a concluir que la formula de arriba genera siempre primos cuando a n se la reemplaza por un numero natural arbitrario. Pero este no es el caso: $f(40) = 1681$, es compuesto como lo serán muchos otros valores.

Es dudoso que un matemático con experiencia en números primos se deje engañar por la evidencia que muestra este ejemplo, pero matemáticos de talla universal han sido tentados a emitir conjeturas soportadas en evidencia con menos casos. Pierre de Fermat fue uno de ellos. El n-ésimo número de Fermat $F(n)$, esta dado por la fórmula

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

Así, $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65{,}537$.

Estos números se conocen como números de Fermat, porque la conjetura fue hecha por el matemático francés en una carta a Marin Mersenne en 1640. Notando que los primeros números en la fórmula resultaron primos, Fermat escribió: "He encontrado que los números de la forma $F(n)$ son siempre primos. He retado a los analistas a que certifiquen la verdad de esta afirmación". No obstante la gran habilidad de Fermat en estos temas, la aserción resultó falsa. Esto fue mostrado en forma definitiva por el matemático suizo Leonhard Euler en 1732: $F(5) = 4294957297$ no es primo. En efecto, no se han encontrado mas números de Fermat primos mayores que $F(4)$.

Hay muchos otros ejemplos donde la evidencia numérica nos puede engañar. Si usted tiene acceso a un sistema algebraico computarizado o a un programa de cálculo científico

---

[1] La columna aparece originalmente en:
http://www.maa.org/devlin/devlin_02_09.html

de alta precisión (varios de ellos se pueden bajar de la red), trate de calcular la siguiente expresión

$$e^{\pi\sqrt{163}}$$

Con una aproximación de 30 cifras decimales. Se obtendría un resultado como

262 537 412 640 768 744.000 000 000 000

¿Un entero? ¡Sorprendente! Asumiendo que uno conoce la identidad famosa atribuida a Euler

$$e^{i\pi} = -1$$

Donde la exponenciación de un número real a una potencia trascendente imaginaria conduce a un resultado entero, uno podría aceptar la posibilidad de que esto ocurra en otra ocasión como la expuesta. ¿Pero cómo es esto posible?

La respuesta es que el resultado no es un número entero. Doce decimales todos iguales a cero, es altamente sugestivo, pero si usted incrementa el numero de cifras decimales en el cálculo a 33 lugares, va a encontrar que

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 743.999\ 999\ 999\ 999\ 250\ \ldots$$

Sigue siendo una respuesta interesante, y estaría en su derecho a sospechar que hay una conexión con el numero 163 que aparece dentro de la raíz cuadrada, que hace que el resultado sea tan cercano a un numero entero, pero no lo consideraremos aquí. Mi punto es simplemente ilustrar que los cálculos numéricos pueden ocasionalmente conducir a conclusiones incorrectas. En este caso, el error radica en tomar como entero un número que es en realidad un número trascendente.

Otra coincidencia, en este caso más cercana a la realidad, por no tener explicación matemática es que con diez cifras decimales

$$e^{\pi} - \pi = 19.99909997 \approx 20$$

Y otro ejemplo más, donde los números pueden conducir a errores. Si se usa un sistema algebraico de cálculo al evaluar la serie se encuentra que

$$81\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lfloor n\tanh\pi\rfloor}{10^{n}}$$

Da una respuesta de 1. Los paréntesis fraccionados representan, el mayor entero menor o igual que el número real en el paréntesis.

Pero esta respuesta solo es una aproximación. La serie realmente converge a un numero trascendente, cuyas primeras 268 primeras cifras decimales conducen al numero 1. En el lugar 269 se descubre que el resultado no es precisamente 1. Para asegurarse que esta primera desviación de 1 no es causada por redondeo uno tiene que verificar aun con más cifras de aproximación.

O trate esta otra suma de mayor número de cifras. La siguiente "igualdad" es correcta hasta el limite de medio billón de dígitos (quinientos mil dígitos):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\lfloor n e^{\pi\sqrt{163}/3} \right\rfloor}{2^n} = 1{,}280{,}640$$

Pero esta suma, lejos de ser un entero (conceptualmente lejos, quiero decir), es probablemente irracional, y más aun, trascendente. Como ya podría adivinar probablemente, este es un ejemplo de cajón relacionado con el segundo caso expuesto arriba. Pero ¡que ejemplo es este!

La Conjetura de Mertens

Un ejemplo famoso y matemáticamente importante, donde la evidencia encontrada conduce a error, es la llamada conjetura de Mertens.

Si se toma cualquier número natural *n*, por el teorema fundamental de la aritmética, o *n* es primo o puede expresarse como el producto de una única colección de primos. Por ejemplo:

4 = 2 x 2, 6 = 2 x 3, 8 = 2 x 2 x 2, 9 = 3 x 3, 10 = 2 x 5.

De estos, 4, 8 y 9 tienen una descomposición en la cual al menos un primo ocurre más de una vez, mientras en la descomposición de 6 y 10, cada primo ocurre solo una vez. Los primos divisibles por el cuadrado de un primo (como 4, 8, 9) se llaman divisibles por primo cuadrado. En otro caso se dice que el número es libre de primos cuadrados.

Si *n* es un número natural libre de primos cuadrados, que no es primo, entonces es un producto o de un número par de primos o un número impar de primos. Por ejemplo $6 = 2 \times 3$ es un producto de un número par de primos, mientras que $42 = 2\times 3\times 7$ es el producto de un número impar de primos. En 1832, A. F. Moebius introdujo la siguiente función simple, llamada la función de Moebius para indicar que tipo de factorización prima tiene un número *n*.

Sea m(1) = 1, como caso especial. Para otro valor de *n*, m(*n*) se define como sigue:

Si *n* es divisible por primo cuadrado, entonces m(*n*) = 0;

Si *n* es libre de primos cuadrados y es el producto de un número par de primos, entonces m(*n*) = 1;

Si *n* es o primo, o libre de primos cuadrados y el producto de un número impar de primos, entonces, m(*n*) = - 1.

Por ejemplo, m(4) = 0, m(5) = -1, m(6) = 1, m(42) = -1.

Para cualquier número *n*, sea *M*(*n*) el resultado de adicionar todos los valores de m(*k*) para *k* menor o igual que *n*. Por ejemplo, *M*(1) = 1, *M*(2) = 0, *M*(3) = -1, *M*(4) = -1, *M*(5) = -2.

En este punto a uno le interesaría investigar el siguiente asunto. ¿Cuál es el primer valor de *n* por encima de 2 tal que *M(n)* tome de nuevo el valor de cero o tome un valor positivo?

Hasta aquí, todo luce como un bonito ejemplo, aunque elemental de matemáticas recreativas. La cosa toma un cariz decididamente más serio cuando uno se entera que el comportamiento de la función $M(n)$ está muy relacionada con la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann.

La conexión fue conocida por T. J. Stieltjes. En 1885, en una carta a su colega Charles Hermite, afirmó haber probado que no importa cuan grande sea n, $|M(n)|$, el valor absoluto de $M(n)$, es siempre menor que $\sqrt{n}$, la raíz positiva de n, es decir: $|M(n)| < \sqrt{n}$.

De haber sido cierta la afirmación de Stieltjes, la verdad de la hipótesis de Riemann se habría seguido de inmediato. Sobra decir, entonces que, Stieltjes estaba equivocado, aunque en este tiempo no era del todo claro. (Por ejemplo, cuando Hadamard escribió su ahora clásico y unánimemente aclamado artículo probando el teorema del número primo, mencionaba que él entendía que Stieltjes había demostrado este teorema con el recurso de la supuesta desigualdad, y ¡pedía excusas por la publicación de su prueba anticipándose a la no publicada de Stieltjes!)

El hecho de que Stieltjes nunca hubiera publicado una prueba podría sugerir que, eventualmente hubiera encontrado un error en su argumentación. Como haya sido, en 1897, F. Mertens produjo una tabla de 50 páginas de valores de m(n) y de $M(n)$ para n entre 1 y 10000, basado en lo cual, consideraba que la desigualdad de Stieltjes "era muy probable". Consecuencia de esto, el resultado de Stieltjes pasó a llamarse la conjetura de Mertens. Por derecho propio, la conjetura debería llevar el nombre de Stieltjes, pero ciertamente Mertens se ganó este derecho por su asociación a la misma al publicar sus cálculos hechos a mano de los primeros 10000 valores de la función de Moebius.

Cuando los matemáticos trajeron los computadores a sus mesas de trabajo, llevaron los cálculos de Mertens considerablemente adelante, tanto como, 7.8 billones de valores, todos ellos satisfaciendo la conjetura. Dada tal cantidad de evidencia numérica uno está tentado a concluir que la conjetura de Mertens es verdadera. Sin embargo, en octubre de 1893, Hermann te Riele y Andrew Odlyzko mostraron ocho años de labor cooperativa que condujo a la prueba de que la conjetura era falsa.

Su resultado se obtuvo por una combinación de técnicas matemáticas clásicas y el poder de los computadores. El computador no se usó para encontrar un número n para el cual $|M(n)| \geq \sqrt{n}$. Aun a la fecha no ha podido encontrarse tal número n y la evidencia disponible sugiere que no existe tal número en el rango de 1 a 10^{30}. En su lugar, los dos matemáticos hicieron una serie de rodeos tan larga que no amerita presentarla aquí. Para un estudio detallado de este proceso mirar mi libro **Mathematics: The New Golden Age**, Columbia University Press 1999, pp.208-213.

Humilde pero no imperturbable, sin embargo, …

Los ejemplos de arriba sirven de amonestación para cuando nuestra meta es buscar la verdad matemática (certeza), la evidencia numérica es a menudo, en el mejor de los casos, apenas sugestiva. Que tan alta podemos poner la barra a saltar en matemáticas, comparada con la física, digamos, donde diez cifras decimales de coincidencia entre teoría y experimento es generalmente mirada como conclusiva, es decir mucho más allá con lo que usualmente se conforman los físicos.

De otro lado, las matemáticas son en su mayor parte mucho menos maliciosas (y así potencialmente más cercana a la física) que mis anteriores ejemplos podrían sugerir. En general dado que los matemáticos tomamos precauciones razonables, podemos, en palabras de Yogi Berra, aprender mucho a través de la observación. Mirando y observando evidencia computacional (a menudo numérica). Eso es.

En la era actual de computadores interactivos y veloces, con herramientas computacionales tales como Mathematica o Maple – sin olvidar poderosos dispositivos de búsqueda como Google – podemos acercar algunas áreas de las matemáticas de un modo que nos recuerdan a nuestros colegas en las ciencias naturales. Podemos hacer observaciones, recolectar datos, y llevar a cabo experimentos (computacionales). Y claro, podemos sacar conclusiones basados en la evidencia obtenida.

El resultado es un área relativamente nueva de las matemáticas llamada Matemáticas Experimentales. La prueba tiene un sitio en las matemáticas experimentales, puesto que la computación puede algunas veces generar visiones que llevan a pruebas. Pero las matemáticas experimentales llevan también a la búsqueda de una conclusión basada en el peso de la evidencia a disposición. Diré algo más en la columna próxima sobre estos temas, mostrando que esta área no es tan nueva como puede parecer a primera vista.[2]

---

[2] Esta columna fue traducida y anotada previamente y apareció en marzo 2009 con el nombre de ¿Matemáticas Experimentales?, en: **http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Filosofia/Devlin.MatematicasExperimentales.pdf**