En el "Ángulo de Devlin"

La Columna de Keith Devlin en la MAA.

Traducida y anotada por Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío.***

Marzo 2009. *¿Matemáticas Experimentales?*

En mi pasada columna[1] di algunos ejemplos de hipótesis matemáticas que, aunque con masivo soporte de evidencia numérica, a la postre resultaron falsas. Los matemáticos saben bien que la evidencia numérica, aun en miles de millones de casos, no es razón suficiente para constituirse en prueba. No importa cuantos ceros de la función zeta de Riemann[2] se calculen y se encuentre que su parte real sea 1/2, la Hipótesis de Riemann (RH) no va a quedar probada, hasta tanto no se logre una prueba analítica.

Pero las matemáticas no son únicamente pruebas. En efecto, la gran mayoría de aquellos que se ganan la vida "haciendo matemáticas" no están comprometidos en la búsqueda de pruebas; su meta es resolver problemas según un grado de aproximación o certeza predeterminado. Aunque la prueba permanece como lo máximo en los "dorados estándares" de la verdad matemática, las conclusiones logradas con base en la evaluación numérica han sido siempre una parte válida de la empresa matemática. En buena parte de la historia de las matemáticas, hubo significantes limitaciones para acopiar evidencias, sin embargo las cosas cambiaron con el advenimiento de la era del computador.

Un ejemplo; el primer cálculo publicado en conexión con los ceros de la función Zeta de Riemann se remonta a 1903, cuando Jorgen P. Gram (1850-1916) evaluó los primeros 15 ceros (con parte imaginaria menor que 50). Hoy conocemos que RH es verdadera para los primeros diez trillones de ceros. Aunque estos cálculos no prueban la hipótesis, hay que reconocer que contribuyen a dar mayor información sobre la misma. En particular, esos cálculos dan una medida de confianza, para aquellos resultados probados usando como base la Hipótesis de Riemann.

Matemáticas experimentales es el nombre que generalmente se da al uso del computador para hacer cálculos – a veces nada distinto que chequeos de ensayo y error – conducentes a buscar patrones; para identificar números y sucesiones particulares, para allegar evidencia que soporte aserciones matemáticas específicas que puedan aparecer por si mismas a través de medios computacionales, incluyendo búsquedas.

Si los antiguos griegos (y otras civilizaciones que empujaron en su inicio el tren matemático) hubieran tenido acceso al computador, es probable que la palabra "experimental" en la frase "matemáticas experimentales", podría aparecer superflua; los tipos de actividades o procesos que hacen "experimental" a una actividad matemática en particular, podrían verse simplemente como matemáticas a secas. Entonces, ¿en razón a

---

[1] La columna de Febrero se puede leer en: **http://www.maa.org/devlin/devlin_02_09.html**

[2] La función zeta de Riemann se define por prolongación analítica para s$\neq$ 1 de la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

La hipótesis de Riemann afirma que los ceros no triviales de esta función caen en la recta *x*=1/2.

qué hago yo esta aserción? Justamente: si se remueve en mi definición el requisito de usar el computador, ¿qué quedaría para describir de aquello que la mayoría, si no todos los matemáticos profesionales, hacen durante su trabajo?

Muchos lectores, que estudiaron matemáticas en el bachillerato o en la Universidad, pero que no son matemáticos profesionales, encontrarán el precedente análisis sorprendente. Pues esa no es la imagen (elaborada cuidadosamente) que de ella tienen. Basta mirar los cuadernos de prácticamente todos los grandes matemáticos y se encontrará página tras página, chequeos experimentales al azar (simbólicos o numéricos) de cálculos exploratorios, presunciones formuladas, hipótesis examinadas, etc.

La razón para que este enfoque de las matemáticas no sea común, es que usted tiene que mirar, el trabajo privado no publicado (durante su carrera) de los grandes, para poder encontrar esto (y en cantidad). Lo que uno encuentra en sus trabajos publicados, son enunciados precisos de hechos verdaderos, sustentados en pruebas lógicas, basadas en axiomas (que pueden, o más frecuentemente, no ser establecidos en el mismo trabajo).

Puesto que las matemáticas han sido, universal y comúnmente, vistas como la más pura y eterna verdad (matemática), es fácil entender que el trabajo publicado de los grandes podría aparecer como lo constitutivo de lo que son las matemáticas realmente. Pero hacer tal identificación es subestimar aquella frase clave “la búsqueda de”. Las matemáticas no son, ni nunca han sido, meramente el producto final de la búsqueda; el proceso de descubrir es, y siempre ha sido, una parte integral de las matemáticas. Como escribió el gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss a su colega Janos Bolyai en 1808, “No es el conocimiento, sino el acto de aprender, ni la posesión, sino el acto de conseguir, lo que causa el mayor disfrute”.

En efecto, Gauss fue claramente un “un matemático experimental” de primera línea. Por ejemplo, su análisis – cuando aun era un niño – de la densidad de los números primos, lo condujo a formular lo que hoy se conoce como el Teorema del Número Primo[3], un resultado que sólo vino a probarse[4] en 1896, más de cien años después de que el joven genio hiciera su descubrimiento experimentalmente.

A lo largo de la mayor parte de la historia de las matemáticas, la confusión de la actividad matemática con su producto final, es entendible: después de todo, ambas actividades han sido desempeñadas por los mismos individuos, usando lo que para un observador externo es esencialmente la misma actividad – mirar fijamente una hoja de papel, pensando duro, y garrapateando sobre el papel. Pero tan pronto como los matemáticos empezaron a usar el computador para el trabajo exploratorio, la distinción llegó a ser obvia, especialmente cuando el matemático pulsa la tecla ENTER para iniciar el trabajo experimental, y entonces sale a comer, mientras la máquina hace su trabajo. En algunos casos, el resultado esperado por el matemático a su regreso, es un nuevo “resultado” no esperado por nadie y sin tener la menor sospecha de cómo probarlo.

Lo que hace a las matemáticas experimentales modernas diferentes (como empresa) de la concepción clásica y práctica de las matemáticas, es que el proceso experimental es mirado con todo derecho, no como un precursor de una prueba, sino como parte significativa de las matemáticas. Antes, la experimentación o las notas privadas escritas por los grandes matemáticos eran estudiadas, con propósitos históricos solamente después de que la prueba se había conseguido, pero no eran dignas de publicarse, ni de ser consideradas

---

[3] El teorema del número primo afirma que $\pi(n)$, el número de primos menores o iguales que n se puede aproximar por

$$\mathrm{Li}(n) = \int_2^n \frac{dx}{\ln x}$$

[4] El teorema lo demostraron Hadamard y de la Vallée Poissin.

como contribución al enriquecimiento de nuestra visión matemática. En particular, esta componente experimental da mayor estatus epistemológico a las aserciones que no han sido formalmente probadas aun, y en algunos casos no serán probadas nunca, al estar sustentadas por un cuerpo considerable de resultados experimentales. (Puede también ocurrir que un proceso experimental por si mismo conduzca a una prueba formal. Por ejemplo , si un cálculo determina que un cierto parámetro p, del que se sabe que es entero, cae entre 2.5 y 3.784, conduce a una prueba rigurosa de que p = 3.)

Cuando los métodos experimentales (usando computadores) empezaron a aparecer en la práctica matemática en los años de 1970, algunos matemáticos, protestaron, diciendo que tales procesos no debían considerarse como genuinas matemáticas – que una meta verdadera debería ser una prueba formal –. Contrariamente, tal reacción no habría ocurrido un siglo antes, o aun en tiempos anteriores, cuando aquellos como Fermat, Gauss, Euler, y Riemann desperdiciaron muchas horas de sus vidas haciendo cálculos (mentales) para vislumbrar “posibles verdades” (muchas de las cuales aunque no todas, lograron ser probadas). El ascenso de la noción de prueba como la única meta de las matemáticas surgió alrededor de fines del siglo diecinueve y comienzos del siglo veinte, cuando el entendimiento del cálculo infinitesimal condujo al descubrimiento que, conceptos tan intuitivos y tan básicos como función, continuidad y diferenciabilidad eran altamente problemáticos, y hasta en algunos casos conducentes a aparentes contradicciones. Los matemáticos enfrentados a una realidad inconfortable, donde sus intuiciones podrían ser inadecuadas o conducentes a error, comenzaron a insistir en la legitimidad de sus juicios de valor, buscando que estos fueran formalmente probados, so pena de ser desterrados de los salones matemáticos universitarios como total y simple cháchara.

Lo que hizo que el péndulo retrocediera para incluir (abiertamente) los métodos experimentales, fueron razones en parte pragmáticas y en parte filosóficas. (Note el sentido de la palabra “incluir”. La inclusión de los procesos experimentales de ninguna manera excluye las pruebas). El factor pragmático detrás del reconocimiento de las técnicas experimentales fue el crecimiento del verdadero poder de los computadores, para buscar patrones y acopiar vastas cantidades de información que sustentaran ciertas hipótesis.

Al tiempo que crecía la disponibilidad de los computadores – cada vez más baratos, rápidos, y poderosos – se hizo irresistible para algunos matemáticos la posibilidad de un cambio gradual, pero significativo, en la forma de considerar su disciplina. La visión platónica de que los objetos matemáticos tienen existencia definida en algún terreno exterior al ser humano, y que la tarea del matemático era desvelar o descubrir las eternas e inmutables verdades acerca de esos objetos, dio pie para aceptar que las matemáticas eran el producto de la mente humana, o el resultado de un tipo particular de pensamiento.

El cambio de la visión platónica (donde las matemáticas son vistas como otra clase de pensamiento), acercó la disciplina más a las ciencias naturales, para las cuales, el objetivo no es establecer “la verdad”, en un sentido absoluto, si no analizar o formular hipótesis, u obtener evidencia que soporte o niegue alguna hipótesis en particular.

En efecto, como el filósofo húngaro Imre Lakatos puso en claro en su libro *Pruebas y Refutaciones*, publicado en 1976, dos años después de su muerte, la distinción entre matemáticas y ciencias naturales – como se practica – es más aparente que real, y aparece como resultado de la moda entre los matemáticos de suprimir el trabajo exploratorio que generalmente precede a la prueba formal. A mediados de los años de 1990, empezó a ser común, “definir” matemáticas como una ciencia; más concretamente: como “la ciencia de los patrones”.

La puntilla final en el féretro de lo que podríamos llamar “núcleo central del platonismo” la puso la aparición de pruebas por computador. El primer ejemplo, fue la prueba en 1974 del famoso Teorema de los Cuatro Colores, un enunciado que hoy por hoy se acepta como teorema sólo sobre la base de un argumento (a la fecha, al menos dos diferentes) del cual, una porción significativa, necesariamente es llevada a cabo con el recurso de un computador.

El grado hasta donde las matemáticas han llegado a parecerse a las ciencias naturales puede ilustrarse usando el ejemplo ya citado: la Hipótesis de Riemann. Como decía, la hipótesis se ha verificado computacionalmente para los diez trillones de ceros más cercanos al origen. Pero todo matemático estará de acuerdo que esto no llena la necesidad de una prueba conclusiva. Ahora, suponga que la próxima semana, un matemático expone en la Internet una prueba de quinientas páginas argumentando que lo expuesto en su artículo constituye una prueba de la hipótesis. El argumento es muy denso y contiene profundas y nuevas ideas. Pasarán años antes de que matemáticos alrededor del mundo hagan el escrutinio detallado de la prueba pero asumamos que se descubran (y se continúan descubriendo) errores, pero que ellos o alguien más (incluido el mismo autor) estén en condiciones de corregirlos. ¿En qué medida la comunidad matemática como un todo, declarará que la hipótesis ha sido en realidad probada? Y aun entonces, ¿que encontraría usted más convincente, el hecho de que hay un argumento – el que no ha leído ni leerá nunca – para el cual ninguno de los cientos de errores encontrados han sido fatales, o el hecho de que la hipótesis ha sido verificada computacionalmente (y asumiendo total certeza) para diez trillones de casos particulares? Distintos matemáticos, claro, darían diferentes respuestas a este cuestionamiento, pero sus respuestas serán simples opiniones.

Con un número sustancial de matemáticos que en estos días aceptan el uso de métodos computacionales y experimentales, las matemáticas han crecido de tal manera que se asimilan en cierto sentido a las ciencias naturales. Algunos podrían hasta argüir que son en realidad, ciencias naturales. Aun así sin embargo, creo ardientemente que serían las más seguras y precisas de las ciencias naturales. El físico o el químico debe confiar en últimas en la observación, la medida y el experimento, para determinar qué es, lo que debe aceptarse como “verdadero”, pero hay siempre la posibilidad de observaciones más precisas (o diferentes) o medidas más precisas (o diferentes), o un nuevo experimento (que modifique o invalide las “verdades” previamente aceptadas). El matemático, sin embargo, tiene como piedra de toque la noción de prueba como el árbitro final. Sí; ese método no es (en la práctica) perfecto, particularmente cuando hay involucradas largas y complicadas pruebas, pero ofrece a cambio, un grado de certeza al que las ciencias naturales muy raramente podrán acercarse.

En conclusión, ¿qué clase de matemáticas hace un matemático experimental? (Más precisamente, ¿Qué clase de actividades realiza, qué permita clasificar lo que hace como matemáticas experimentales?) Aquí presentamos algunas:

- Computación simbólica a través de sistemas algebraicos computarizados, como Mathematica o Maple
- Métodos de visualización de datos
- Algoritmos como PSLD y métodos de relación en enteros
- Aritmética de punto flotante de alta precisión
- Evaluación numérica de alta precisión para integrales y suma de series infinitas
- Aproximación por iteración de funciones continuas
- Identificación de funciones basada en características gráficas.

¿Desea saber más de estos temas? Sin haber sido matemático activo en el modo experimental (aparte del juego familiar de ensayo y error con ideas formando parte de alguna investigación matemática), recientemente tuve la oportunidad de aprender un poco del tema colaborando en la escritura de un libro introductorio, con uno de los líderes en este campo: el matemático canadiense, Jonathan Borwein. La obra la acaba de publicar A K Peters: **The Computer as Crucible: An Introduction to Experimental Mathematics**.(*El Computador como Crisol: Una Introducción a las Matemáticas Experimentales*). La columna de este mes es una reseña abreviada del libro.

Ambos autores desean que ustedes disfruten la lectura del libro.