Aproximación a los Números Enteros en la Escuela Elemental

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío*. Armenia. Colombia

"*Hoy tengo 77 años y estoy convencido que hasta ahora comienza mi verdadero trabajo ¡Vivan los longevos!*" **— Akira Kurosawa —**

"Algunos *sueñan, para escapar de la realidad, otros, para cambiarla por siempre!*"
— Soichiro Honda —

Resumen

Introducimos intuitivamente aquí, el conjunto de los números enteros como consecuencia del efecto direccional sobre los números naturales del operador (V^-, P, V^+). Los números naturales fueron introducidos en un artículo anterior[1]. El operador (V^-, P, V^+) corresponde al efecto que ejerce la acción dinámica del movimiento bidireccional.

Abstract

In this paper we introduce intuitively the set of integer numbers as a consequence of the effect on natural numbers of operator (V^-, P, V^+). Natural numbers were defined in a past article[1]. The operator (V^-, P, V^+) is associated to the dynamic effect of bidirectional movement.

Introducción

¡*Venga*!, ¡*Pare*!, (o, ¡*Quieto*!), ¡*Vaya*!, son exclamaciones que el bebé va a escuchar y entender en sus primeros meses de vida. Las órdenes primera y tercera, las entenderá el niño como mandatos de movimiento, mientras que la segunda la interpreta como orden de quietud o de reposo. La disposición con que venimos como seres humanos, a entendernos con palabras nos permite llegar a esferas abstractas del conocimiento como es, el apropiarnos del concepto de número. Es así como damos nuestros primeros pasos; un pasito primero, luego dos y con los días ya salimos corriendo. Sin embargo nuestro aprendizaje primario en cuanto al movimiento es en un solo sentido, hacia adelante; con el tiempo nos arriesgaremos a reversar lo andado o deshacer los pasos sin cambiar de dirección.

Antes de seguir, hagamos claridad sobre los términos mencionados en el párrafo anterior: *sentido* y *dirección*. La dirección del movimiento la determina la recta (o la curva) sobre la que supuestamente nos movemos; mientras que, el sentido supone una dualidad del movimiento: hacia adelante, o, hacia atrás, a la izquierda o a la derecha, hacia arriba o hacia abajo, etc. Al situarnos en el plano, digamos, en el plano euclídeo, podemos imaginarlo como formado por rectas paralelas una tras de la otra (un plano reglado). Estas rectas definen la *dirección*. Por ejemplo, en el plano horizontal (aquí la burbuja del nivel está centrada)

[1] *Nueva Definición de Número Natural y su Incidencia en la Enseñanza de las Matemáticas*. Disponible en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/NUEVA_DEFINICION_NUM_NATURAL_%2021_11_17.pdf

hablamos de la dirección Oeste-Este (o también Este-Oeste), para significar el conjunto de todas las rectas horizontales que cubren el plano frente a nosotros, los observadores; y la dirección Sur-Norte (o lo mismo, Norte-Sur) la entenderemos como todas las verticales o perpendiculares a las anteriores. Esto nos ilustra cómo, el plano puede imaginarse formado por dos familias de rectas: las horizontales y las verticales. Estas familias son las que determinan las dos direcciones básicas en el plano: dirección horizontal y dirección vertical.

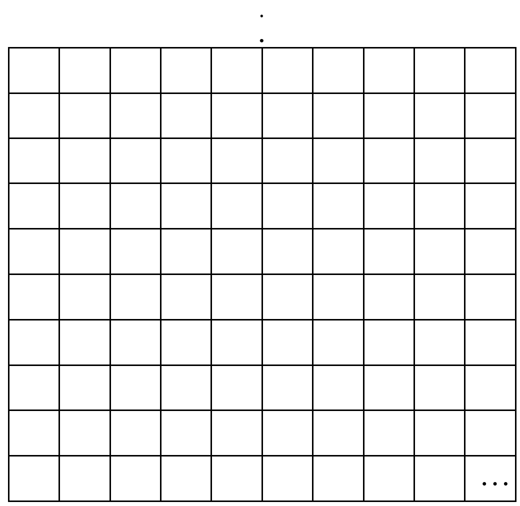

*Fig.*1. Direcciones básicas en un plano reglado: *horizontal* y *vertical*. Aquí suponemos que el plano está conformado por infinitas rectas paralelas, las horizontales y las verticales y el movimiento se realiza a lo largo de una de ellas.

El *sentido* implica la posibilidad de movimiento a lo largo de una recta, ya sea hacia adelante o hacia atrás; en el caso de la dirección horizontal mencionada, de izquierda a derecha (digamos *hacia adelante*), o, de derecha a izquierda (aceptemos: como ir en reversa o *hacia atrás*); así mismo, en la vertical hacia adelante significa hacia el fondo y hacia atrás será reversar hacia el punto de partida.

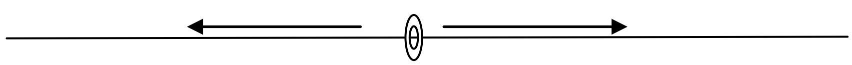

Fig. 2. Sentidos del movimiento sobre una recta con referencia a un origen o punto de partida: *hacia adelante o movimiento a la derecha* y *hacia atrás* o *movimiento a la izquierda.*

Operadores

Entenderemos aquí como *operador* a una función o acción sobre un conjunto dado al que transforma en un nuevo conjunto, a veces más rico que aquel con el que partimos. Ejemplo de funciones de conjunto son: la *suma*, que convierte un par de números en otro número, la función *producto*, que lleva un par de números en un tercero, la función *área* (*Fig.* 3) o la función *volumen* que convierte a un conjunto de puntos en el espacio, en un número real no negativo: el área o el volumen del conjunto dado.

Un operador elemental que manejamos en la primera infancia es el *contar*. Al ordenar al infante que cuente de 1 a 10, esta orden la entiende como enunciar en lista, la secuencia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. En términos operacionales el proceso de contar en su totalidad, se puede dividir en dos aspectos; la *Pregunta*: que en símbolos se reduce a indagar sobre la igualdad abierta: $c(1,10) = ¿?$ donde c es el operador *conteo*, aplicado al par de números 1 y 10.

La “interpretación práctica” de esta pregunta se reduce a enumerar los pasos a dar entre 0 y 10. La *Respuesta* será el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, esto es, hallar el efecto del operador *c* sobre {1,10}. Este es quizá, el primer operador que entra en el imaginario infantil.

El operador *c* transforma al conjunto {1,10} en el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, lo que expresado simbólicamente, corresponde a,

$$c(\{1,10\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

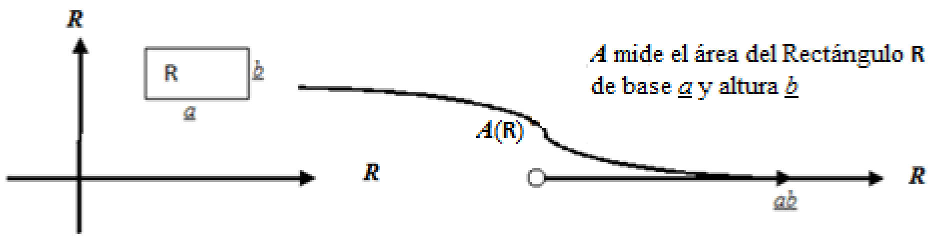

*Fig.*3. Representación gráfica del operador área actuando sobre un rectángulo en el plano. Este es un ejemplo de una función de conjunto que lleva una región del plano hacia el conjunto $\boldsymbol{R}^{+}\cup\{0\}$ de los números reales no negativos. Aquí el área del rectángulo es: $A(\mathbf{R}) = \underline{ab}$

Entendemos por interpretación práctica aquello que intuitivamente siente el niño cuando le hablan de contar. El interpreta al número “uno” como el primer “paso” después de la quietud, es decir la intuición presume una concepción innata del tiempo y con él, desde luego la noción de movimiento y es así como el infante interpreta el contar: primero uno, luego dos, y así sucesivamente. Esta noción de orden, el entender que después de uno sigue dos, que después de dos sigue tres, etc., es lo que capacita la mente infantil para captar cuándo, un número es mayor que otro.

Sintetizando: la *noción de orden* es una de las relaciones básicas que el niño aprehende en los primeros años de vida. Esta experiencia es la que permite dar gran dimensión al proverbio chino: “un viaje de mil millas empieza con *un* paso”.

Otro operador empírico de los primeros años de escolaridad es el de contar los elementos de un conjunto dado. En este caso el conjunto de partida puede ser cualquier conjunto de elementos distinguibles y el conjunto de llegada son los números naturales. Aquí el operador, llamémoslo cardinal, simbolizado como “#”, responde a la pregunta “¿cuántos?”. Por ejemplo la pregunta abierta ¿Cuántos elementos tiene el conjunto { ˚ ,ˇ , ˜}?, queda formulada como: #({ ˚ ,ˇ , ˜}) = ¿? La respuesta es 3. En este caso el orden en que aparecen los elementos no importa. Entonces se nota una diferencia grande entre el operador *c* del conteo visto arriba y este nuevo operador #, o cardinal; en el primero la repuesta es un conjunto cuyos elementos aparecen en orden, mientras que la respuesta para el segundo es sólo un número natural. Esto es:

#({ ˚ ,ˇ , ˜}) = 3

El conteo, mencionado arriba, puede darse entre dos elementos arbitrarios de **N**, digamos entre m y n, suponiendo que m es menor que n, así:

$$c(\{m, n\}) = \{m+1, \dots, n\}$$

En este caso la imagen de $\{m, n\}$ a través del operador c, es el conjunto $\{m+1, m+2,\dots, n\}$. A este conjunto podríamos aplicarle el operador # para saber cuántos elementos tiene, es decir, responder la pregunta abierta: $\#(\{m+1, \dots, n\}) =$ ¿?

La respuesta a la anterior pregunta es precisamente encontrar el resultado de lo que en la escuela primaria se llama *resta*, esto es, $n - m$, cuyo algoritmo nos costó dificultad aprender cuando niños. Aquí llamaremos d al operador *diferencia* que directamente lleva el par (m, n) a número natural $n - m$. $d(m, n)$ cuenta el número de pasos para llegar de m a n. Juntando los dos procesos, tenemos:

$$n - m = d(m, n) = \#(\{m+1, \dots, n\})$$

Ejemplo. La diferencia entre 14 y 19 es 5, porque $d(14,19) = \#\{15, 16, 17, 18, 19\} = 5 = 19 - 14$.

Para que $n - m$ sea un número natural se requiere que n y m sean naturales y que n sea mayor o igual que m.

Volvamos al comienzo con las exclamaciones ¡*Vaya*!, ¡*Venga*!, ¡*Pare*!, a las que asociaremos los símbolos: V^+, V^-, P. Si tenemos los números naturales $\{0, 1, 2, 3,\dots\}$, denotados de aquí en adelante como **N**, es posible entender intuitivamente el mensaje ¡*Vaya a* 1!, ¡*Vaya a* 5!, etc., simbólicamente denotado: $V^+(1)$, $V^+(5)$, etc., como: partiendo de cero dar *un* paso hacia adelante o contar hasta uno, partiendo de cero dar *cinco* pasos hacia adelante, o contar hasta 5, etc. Análogamente, vamos a asociar la orden "Venga o Devuélvase", con "V^-" y entenderemos el mensaje, ¡*Venga* 1!, simbólicamente: $V^-(1)$, como el reverso del mensaje ¡*Vaya a* 1! También, ¡*Venga* 5!, denotado: $V^-(5)$, como el reverso de ¡*Vaya a* 5! Si tomáramos como origen del movimiento un punto marcado con el símbolo 0 (*Fig.* 4), la orden $V^+(1)$, en forma corta, +1, corresponde a un punto a la derecha del punto 0. En forma similar $V^-(1)$, en forma más corta: -1, es un punto a la izquierda de 0 y simétricamente colocado a la izquierda de +1, sobre la misma recta que determina la dirección del movimiento.

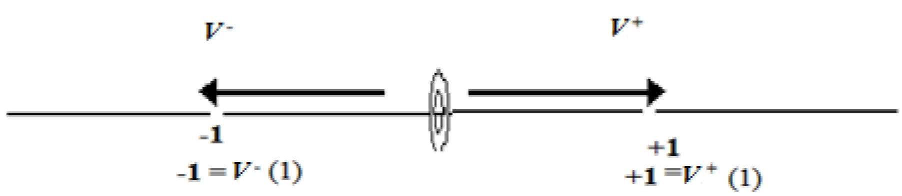

*Fig.*4. Efecto de los operadores V^+ y V^- en el número natural 1. V^+, convierte a 1 en +1 y V^- convierte a 1 en -1. Similarmente con los demás naturales; $V^+(n) = +n$ y también $V^-(n) = -n$.

El caso de ¡*Pare*!, lo interpretamos como una orden de volver al origen, es decir, a *cero*, no importa donde se esté. Es como si el marco de referencia del movimiento se trasladara, haciendo coincidir a n con 0. Así por ejemplo, decir ¡*Pare* 5!, simbólicamente, $P(5)$, o más corto, 0, lo interpretamos como: convertir a 5 en 0.

En nuestro caso podríamos interpretar a V^+ como el operador que lleva a **N** en **N**, específicamente, V^+(**N**) = **N**, en el supuesto que identifiquemos a *n* con +*n*. Es como imaginar que V^+ es un operador identidad que deja sin cambio al conjunto de entrada. No ocurre lo mismo con V^- que convierte a cada número *n* de **N**, excepto 0, en $V^-(n) = -n$. Claramente –*n*, no está en **N** y así tenemos un nuevo conjunto de números {…, -3, -2, -1} al que llamaremos conjunto de enteros negativos y lo bautizaremos con el símbolo $\mathbf{Z}^-$. Análogamente al conjunto {+1, +2, +3,…} lo llamaremos el conjunto de los enteros positivos, denotado como $\mathbf{Z}^+$ y al conjunto **N** = {0, +1,+ 2, +3,…}, lo denominaremos el conjunto de *enteros no negativos*.

Si a cada *n* se le aplica dos veces el operador V^-, el número regresa al punto de partida, es decir: $V^-[V^-(n)] = V^-(-n) = n$.

Nos queda el operador *P*, el equivalente a un agujero negro. Su acción reduce a cualquier número *n*, a cero, o si se quiere, $P(n) = 0$. Resumiendo:

$V^+(\mathbf{N}) = \{0, +1, +2,\ldots\} = \mathbf{N}$

$\mathrm{P}(\mathbf{N}) = \{0\}$

$V^-(\{1, 2, 3,\ldots\}) = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

En lo anterior, los tres operadores actúan individualmente sobre **N**, o en parte de él, dando como resultado tres conjuntos distintos: el conjunto de los números naturales (o enteros no negativos), el conjunto cuyo único elemento es 0 y finalmente el llamado conjunto de enteros negativos.

Por simplicidad usemos la notación, $\boldsymbol{A} = (V^-, P, V^+)$, como el operador que resulta de la unión de la acción de cada uno de los tres operadores de arriba. Con esto, las expresiones anteriores, se simplifican:

$\boldsymbol{A}(\mathbf{N}) = (V^-, P, V^+)(\mathbf{N}) =\{\ldots, -3, -2, -1\}\cup\{0\}\cup\{0, +1,+2, +3,\ldots\}=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$.

Al último conjunto lo llamaremos *Conjunto de Números Enteros* y lo simbolizamos como **Z**, la letra inicial de la palabra alemana, *zahl*, que significa número.

Hemos visto cómo, es posible llegar a un conjunto numérico más amplio que los números naturales, a través de la intuición infantil. El ingrediente principal en este experimento es la noción de movimiento muy ligada a la experiencia infantil. Teniendo a los enteros como marco de referencia se puede introducir la *sustracción* o *resta* sin mayores traumas.

El Operador Valor Absoluto

Vimos cómo, el operador V^- convierte cada entero negativo en positivo, que el operador V^+ deja sin cambio a todo natural y que el operador *P*, anula a cualquier número al que se aplique. En base al efecto de estos tres operadores podemos definir un nuevo operador llamado *valor absoluto*, que lo denotaremos con dos barras verticales, “| |”, y con la propiedad de que al cero y a los enteros positivos los deja sin cambio, pero a cada entero negativo, digamos, lo positiviza. Sintetizando: Dado cualquier entero *n*, su valor absoluto, notado, $|n|$ (se lee valor absoluto de *n*), se define por:

$$|n| = \begin{cases} (V^+)(n) = n, si\ n\ es\ positivo \\ P(n) = 0,\ si,\ n = 0 \\ (V^-)(n) = -n, si\ n\ es\ negativo \end{cases}$$

En todos los casos, el valor absoluto es no negativo, es decir, o es cero, o es positivo. Por ejemplo, $| 7 | = 7$, $|-7| = 7$, $| 0 | = 0$.

Operaciones entre Operadores

En la terna de operadores: $\{V^-, P, V^+\}$, podemos definir intuitivamente operaciones cerradas básicas de adición y multiplicación, observando el efecto que cada uno de ellos ejerce sobre los otros.

Para la adición definimos:

$V^+ + P = P + V^+ = V^+$

En lenguaje usual: desplazamiento a la derecha más quietud da desplazamiento a la derecha; quietud más desplazamiento a la derecha da desplazamiento a la derecha.

$V^+ + V^+ = V^+$

El desplazamiento a derecha se preserva.

$V^- + V^- = V^-$

El desplazamiento a izquierda se preserva.

$V^- + V^+ = V^+ + V^- = P$

Desplazamiento secuencial a derecha y a izquierda se anula.

$V^+ + P = P + V^+ = V^+$; $V^- + P = P + V^- = V^-$

Desplazamiento a derecha seguido de quietud o quietud y luego desplazamiento a derecha da, desplazamiento a derecha; lo mismo aplica para desplazamiento a izquierda.

Similarmente podemos definir e interpretar en lenguaje corriente, la multiplicación, notada como "•".

$V^+ \bullet P = P \bullet V^+ = V^- \bullet P = P \bullet V^- = P \bullet P = P$

Quietud y acción dan quietud. Quietud y quietud da quietud.

$V^+ \bullet V^+ = V^- \bullet V^- = V^+$

Desplazamiento a derecha y desplazamiento a derecha da desplazamiento a derecha. V^- significa cambio de sentido o sea retroceso y $V^- \bullet V^-$ significa retroceso del retroceder, mejor dicho, adelantar.

$V^+ \cdot V^- = V^- \cdot V^+ = V^-$

V^+ preserva el sentido mientras que V^- lo cambia, entonces $V^+ \cdot V^- = V^-$, y, $V^- \cdot V^+ = V^-$

Sintetizando los resultados anteriores en tablas pitagóricas nos quedaría:

Tablas de adición y multiplicación para Operadores

$+$	V^-	P	V^+
V^-	V^-	V^-	P
P	V^-	P	V^+
V^+	P	V^+	V^+

$\cdot$	V^-	P	V^+
V^-	V^+	P	V^-
P	P	P	P
V^+	V^-	P	V^+

***Figura* 1.** A la izquierda la tabla pitagórica para sumar operadores y a la derecha la tabla de multiplicar de los operadores V^+ y V^-. Note que la tabla de la derecha corresponde a lo que en álgebra elemental se llama *ley de los signos*.

Tratemos ahora de entender cómo trabajan estos nuevos operadores sobre un número n dado. Por ejemplo si aplicamos $(V^+) + (V^+)$ al número n, tenemos: $[V^+ + V^+](n) = (V^+)(n) = n$. Note que: $V^+ (n) + V^+ (n) = n + n = 2n$, lo que muestra que estos operadores no son distributivos, o sea, $[V^+ + V^+](n) \neq V^+(n) + V^+(n)$.

Habiendo construido **Z**, lo inmediato ahora es redefinir las operaciones básicas que teníamos en **N,** como son: adición y multiplicación, simbolizadas por, +, y, ·, respectivamente, usando las tablas para los operadores **+** y **·**.

Definición de Adición en Z

Recordemos el efecto de los operadores V^+ y V^-. El primero corre a la derecha y el segundo a la izquierda el número sobre el cual aplica. Por ejemplo, si se aplican sobre el mismo número n, $V^+(n) = n$, y $V^-(n) = -n$. Observemos que si *n es negativo*, $|n| + n = V^-(n) + V^+(n) = -n + n = 0$, de acuerdo a la definición de valor absoluto.

Decíamos que **Z** está formado por: $\mathbf{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}^-$. Si queremos hallar la suma de dos números m y n, debemos ubicarlos en el conjunto apropiado para aplicarles la tabla pitagórica 1.

1) Si m y n están en $\mathbf{Z}^+$, la adición es la misma que en los números naturales
2) Cuando m y n están en $\mathbf{Z}^-$, se procede como en el caso 1) aplicando el operador V^- a $(|m| + |n|)$.
3) Si m está en $\mathbf{Z}^-$ y n está en $\mathbf{Z}^+$, se procede así: Se toma $|m|$ y $|n|$, se halla la diferencia entre ellos y se toma el signo del que tenga mayor valor absoluto.

Multiplicación de Enteros

La multiplicación se realiza como en los números naturales aunque teniendo en cuenta las reglas determinadas por la tabla de la misma operación entre los operadores (V^+) y (V^-). Si los números son positivos es la misma operación que en **N.** Si ambos son negativos siguen la regla $V^- \cdot V^- = V^+$, del producto de operadores.

En el caso de la multiplicación de dos números enteros con signo cambiado ocurre lo mismo que con los operadores V^+ y V^- y el producto es negativo.

Hasta ahora solamente hemos mencionado una operación considerada elemental: la *substracción* o *resta*. La apreciación de que la resta es elemental no es muy correcta por cuanto que no es una operación cerrada en **N**, lo que significa que no siempre se puede realizar. Es posible hacerse, pero, siempre y cuando el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo. En **Z**, sin embargo, la resta queda implícita al suponer que uno de los sumandos es negativo y el resultado puede ser positivo, negativo o cero.

Se queda en el tintero, otra operación también considerada elemental: la división. Esta operación al igual que la substracción no es cerrada en los números naturales, ni en los enteros, pues no siempre el resultado de la división de enteros es otro entero. Para entender la división es necesario construir un conjunto nuevo que llamaremos números racionales y que se simboliza con la letra **Q**, la inicial de la palabra latina *quotient*. Esta operación la estudiaremos en trabajo aparte.

Armenia, Colombia, Diciembre de 2017