El Tortuoso Tránsito de lo Discreto a lo Continuo

Apuntes sobre el origen de los números reales

Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío***

"*En la desmitificación hay una gran alegría creadora.*" **Alberto Aguirre** (1926 – 2012).

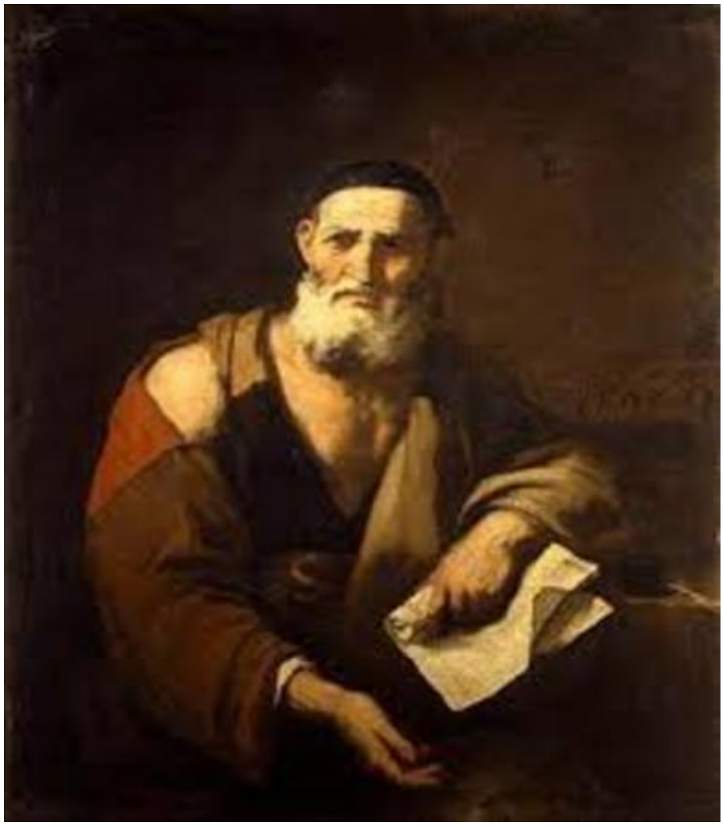

Imagen figurada de Leucipo (Siglo V A. C.). Fue el iniciador del atomismo y por cierto el precursor de la química, la física y en general de lo que dio en llamarse durante la época de la Ilustración, la Filosofía Natural.

Motivación. Leucipo, Demócrito y Epicuro, entre los pensadores presocráticos, concibieron a la naturaleza como compuesta por minúsculas partículas (átomos) indivisibles y en perpetuo movimiento. Los antiguos griegos se preocuparon por la especulación teórica en torno al espacio estelar y su relación con nuestra tierra y llegaron hasta formular teorías cosmológicas capaces de predecir eclipses, como se dice que lo hizo Tales de Mileto en relación a la predicción del eclipse de sol que ocurrió en el año 585 A. C. Sin embargo los filósofos griegos de la antigüedad no especularon en torno a lo diminuto y a las leyes que rigen esta dimensión. Hoy la humanidad se ha doblegado frente a un microrganismo diminuto en términos cósmicos: el COVID-19. Así, lo microscópico logra tener para los humanos consecuencias aún mayores que las amenazas originadas en la inmensidad insondable del cosmos.

La filosofía de Platón y Aristóteles intentó borrar todo resto de la teoría atomista, a tal punto, de impulsar a sus seguidores a destruir los libros de Demócrito y de los otros filósofos de la escuela eleática. Sin embargo el atomismo no murió del todo por cuanto que, Epicuro en el siglo III A. C. incorporó a sus especulaciones filosóficas la tendencia atomista que a lo largo de los siglos ganó simpatizantes. Entre ellos el poeta romano Tito Lucrecio Caro (Siglo I A. C), más conocido como Lucrecio, quien expuso la teoría atomista de Demócrito y Epicuro en una obra que logró sobrevivir hasta la edad media con el nombre *De Rerum Natura* (De la naturaleza de las cosas). El poema fue descubierto en una biblioteca de un monasterio remoto en el siglo XV y publicado difusamente en toda Europa y acogido con simpatía entre la comunidad intelectual que empezaba a tomar forma en la naciente universidad. Esta obra ejerció gran influencia como motivación para la revolución científica de los siglos XVI y XVII. Muchos intelectuales del Renacimiento y la Ilustración acogieron en cierta medida el atomismo. Esto explica en cierto modo que, la comunidad científica hasta hoy tienda a aceptar a la naturaleza como discreta[1]

¿Qué hay detrás de los números reales?

La historia es larga por cuanto que el problema del continuo asociado a los números reales está entroncado en las bases filosóficas que dieron origen a la teoría de números desde los tiempos de Tales de Mileto en el Asia Menor en el siglo VII A. C. El germen de la especulación numérica empieza con Demócrito, discípulo de Leucipo, quien propone el dilema del ser y del no ser, y su coexistencia simultánea en el tiempo. Desde el punto de vista físico propone la existencia del átomo (el ser) y el vacío (el no ser). La única forma de concebir el número (el ser) es la existencia del vacío (el no ser) que separe un número del siguiente. Este es el caso, por ejemplo en los números naturales, 0, 1, 2, … , donde la existencia de ellos sólo se entiende si entre dos sucesivos existe el vacío o la separación. Análogamente, para los números racionales. Entre ellos deben existir separaciones que haga a uno distinguible de los otros.

Los números reales aparecen en tiempos de Pitágoras en la forma de números irracionales, o aquellos no expresables como cocientes de enteros. Probablemente, entre los primeros que no cumplían esta condición eran $\sqrt{2}$ y $(1+\sqrt{5})/2$. El primero aparece en el problema de medir la diagonal del cuadrado con su lado y el segundo en la construcción de la estrella de cinco puntas, distintivo de la hermandad pitagórica.[2] Al aparecer los números algebraicos, como los mencionados, cabe preguntarse si son todos ellos los que llenan los vacíos que separan los racionales. La respuesta resultó ser negativa. Hay otros números que no son soluciones de ecuaciones algebraicas, como $x^2 - 2 = 0$, y, $x^2 - x - 1 = 0$, las que generan la aparición de los irracionales mencionados. Casos de este tipo se conocían desde el tiempo de Euclides como el número π. Estos llegaron a llamarse desde el siglo XVIII, números trascendentes, entre los cuales aparece el número π y el número de Euler e, base de los logaritmos naturales, que juegan un papel tan importante en las matemáticas.

---

[1] Un libro reciente hace un análisis de la influencia de Lucrecio en las tendencias de la filosofía y la física contemporáneas. Ver: **Nail, T.** *Lucretius I: An Anthology of Motion* (Edinburgh University Press, 2018).

[2] Ver: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/El%20problema%20de%20la%20Inconmensurabilidad..pdf

El problema se sigue complicando porque al suponer que los números irracionales son los que llenan los vacíos dejados por los racionales, ¿cómo podemos distinguir un número específico en este nuevo conjunto más grande? ¿Cómo podemos poner el vacío entre uno y el otro para hacerlos distinguibles? Aquí aparece el gran problema de las matemáticas que aún sigue abierto: el *problema del continuo*. Consecuencia de este interrogante surge la gran pregunta, también aún abierta: ¿*Es la naturaleza continua o discreta*?

La idea intuitiva de lo discreto está asociada a los conjuntos cuyos elementos se muestras separados y pueden contarse como uno hace con los números naturales, los enteros y aún con los números racionales o los números algebraicos. Sin embargo con los números reales en general que contienen a todos los anteriores, y aquellos que no clasifican en estas categorías, la situación es distinta porque suponemos que no hay vacíos que separen unos de otros. La idea se ilustra con la recta entendida como la traza que deja una partícula en movimiento. Allí no hay espacio entre un lugar y el siguiente. Así se ha entendido el continuo a través de los siglos, desde el tiempo de Arquímedes hasta nuestros días.

Al considerar el continuo como se menciona arriba, aparece un nuevo dilema inmerso en el concepto de movimiento. El movimiento a lo largo de la historia se muestra pletórico de controversias filosóficas de todo tipo, desde las famosas paradojas de Zenón[3] hasta lo inherente a la naturaleza de la luz, como es el dilema de si la luz es partícula, o es una onda o ambas. Finalmente si, fenómenos como la gravitación, los campos eléctricos y magnéticos e inclusivamente el espacio-tiempo son continuos o discretos.

Fue precisamente Arquímedes quien dio las primeras puntadas para definir los números trascendentes, en particular para encasillar al número π entre dos sucesiones de números racionales, una de ellas creciente y la otra decreciente, que él supone van a desembocar en el esquivo número. Este método se origina en la teoría de exhausción iniciada por Eudoxio, un discípulo de Platón. El método de Arquímedes busca en este caso, aproximar la longitud de la circunferencia con el recurso de polígonos regulares, inscritos y circunscritos, para llegar a una aproximación cada vez más fina en la medida en que el número de polígonos crece.

Una aproximación a la definición de número real

Se ha hecho costumbre asociar los números reales con los puntos de la recta. Desde el punto de vista pedagógico es muy ilustrativo y a la vez conducente a la idea intuitiva de continuidad. Sin embargo los números no pueden identificarse con entes geométricos de ninguna categoría, por cuanto que la geometría involucra objetos muy diferentes a lo que es la materia prima de la teoría de números: entes abstractos que perviven solamente en la mente humana. Más exactamente, los números no se pueden ver, tocar, ni sentir; son creaciones mentales y que la cultura humana desde épocas inmemoriales ha logrado apropiarse para darles uso práctico, no solamente en la geometría, sino también, en la física y en todas las áreas del conocimiento científico, humanístico y técnico.

---

[3] Invito al lector a visitar: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Paradoja%20de%20Aquiles%20y%20la%20tortuga.pdf

Una *sucesión*, en matemáticas, se entiende como una función con dominio en los números naturales y rango, en general, los números reales, y en nuestro caso con rango en **Q**, el conjunto de los números racionales, expresados decimalmente como lo hemos hecho en un pasado artículo[4] y como usualmente se representan en el lenguaje usual.

Definición. Un número real *r* lo definimos como el *límite común* hacia donde convergen dos sucesiones, una creciente y decreciente la otra.

Para el caso del número π, Arquímedes, usó la aproximación de la longitud de la circunferencia a través de polígonos regulares, inscritos y circunscritos, para concluir que este número siempre está entre los valores registrados en la segunda y tercera columna de acuerdo al número de lados que aparece a la derecha de la tabla anexa.

Tabla de longitudes de polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia según el método de Arquímedes

Aproximación Promedio de π por exceso	π según Long. de Perímetro Pol. Inscritos	π según Long. Perímetro de Pol. Circunscritos	# Lados
3.25064…	3.03718…	3.46410…	6
3.16060…	3.10582...	3.21539…	12
3.14613…	3.13262…	3.15965…	24
3.14271…	3.13935…	3.14608…	48
3.14187…	3.14103…	3.14271…	96

El valor de π con cinco cifras de aproximación es 3.14159. Observe que el promedio de las dos últimas aproximaciones de la tabla es 3.14187, a sólo 28 diezmilésimas del valor real de π para el mismo número de cifras. Si el número de lados sigue duplicándose los perímetros de los polígonos se vuelven indistinguibles al lado de la circunferencia y los valores de sus longitudes se acercan rápidamente a la longitud de la circunferencia.

Los números que aparecen en la tabla son fracciones decimales racionales de infinitas cifras. La segunda columna muestra una sucesión creciente y la tercera columna es un ejemplo de una sucesión decreciente; ambas, a medida que el número de la derecha crece, se hacen cada

[4] http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/Numeros%20Racionales_EscuelaElemental.pdf

vez más próximas al número π. Estas sucesiones son un buen ejemplo de lo que Dedekind llamó *cortaduras*, y que son hoy en día el instrumento para definir los números reales en los textos de matemáticas.

Nuestra definición es lo suficientemente amplia como para incluir a todos los números reales, incluyendo números enteros, racionales, algebraicos y trascendentes. Para ilustrar imaginemos que queremos definir el número dos como un número real. En este caso tendremos que encontrar un par de sucesiones, una creciente y otra decreciente que converjan a dos. En términos generales podemos asociar a cada número real una expansión decimal de un número infinito de cifras. No obstante se sabe que los números racionales tienen expansiones periódicas a partir de algún punto, por eso usaremos para simplificar su escritura, una barra horizontal encima de las cifras que se repiten como aparece en la tabla que sigue.

Sean: $f_n(2) = 2 - 10^{-n}$, y, $g_n(2) = 2 + 10^{-n}$ dos sucesiones definidas para $n \geq 1$. Sus valores respectivos serán:

$f_n(2) = 2 - 10^{-n}$	$g_n(2) = 2 + 10^{-n}$
1.90000…	2.10000…
1.99000…	2.01000…
1.99900…	2.00100…
1.99990…	2.00010…
1.99999…	2.00000…
…	…
$1.\overline{9}$	$2.\overline{0}$

El significado de los dos últimos términos en la tabla se representa simbólicamente como

$$\lim_{n\to\infty}(2 - 10^{-n}) = 2, \text{ y } \lim_{n\to\infty}(2 + 10^{-n}) = 2$$

Es decir, $1.\overline{9} = 2.\overline{0}$. Este resultado puede interpretarse como la definición del número real 2. El mismo argumento vale para cualquier otro número racional.

El conjunto de los números reales está constituido hasta el día de hoy por los números racionales, los números algebraicos y el conjunto de los números trascendentes. Los dos primeros son conjuntos enumerables, en el sentido de que tienen la misma potencia de **N** o si se quiere son el rango de una sucesión definida en los números naturales. Sin embargo el conjunto de los números trascendentes es no enumerable. Aquí volvemos al principio ¿cómo saber cuáles son los números que se alojan en seguida de π? Sabemos que en cualquier intervalo por pequeño que sea alrededor de cada número hay tantos números como números reales hay. Uno se pregunta si además de los conjuntos hasta aquí mencionados, existen otros conjuntos que puedan incluirse en **R**. Para responder a esta pregunta tendríamos que salir del modelo tradicional en el que se definen los números reales.

Para insertar en las posibles porosidades de **R** nos queda el recurso de los números infinitesimales, siempre que cambiemos nuestro modelo tradicional en el que hemos venido inmersos. Este nuevo modelo se llama modelo no estándar y conduce a los números hiperreales ***R**. Este conjunto ampliado de números contiene elementos infinitos y elementos infinitesimales. Lo anterior significa que, intuitivamente cada real x está acompañado por dos infinitesimales, $x - \varepsilon$, y, $x + \varepsilon$, que sirven digamos de pegamento con los dos número reales vecinos. Este modelo de conjunto numérico es el que más se acerca a la idea intuitiva que tradicionalmente tenemos de *continuo* y muy acorde con la similitud de continuidad de una recta.

La invención de los infinitesimales no es algo novedoso. Aparece en tiempos del apogeo de la cultura griega, con Eudoxio y el método exhaustivo que utilizó Arquímedes en la aproximación de π y en la cuadratura del segmento parabólico. Los trabajos de Leibniz y Newton conducentes a la creación del cálculo diferencial e integral se basan precisamente en el uso de los infinitesimales. Sin embargo, quien dio a los infinitesimales su carta de naturaleza en el concierto de las matemáticas puras fue Abraham Robinson en los años sesentas del siglo pasado.

Foto tomada de la Biografía de Abraham Robinson (1918-1974) escrita por Joseph W. Dauben. Robinson fue un gran creador de matemáticas en el siglo XX. Nos dejó los fundamentos del análisis no estándar y un nuevo modelo donde acomodar los infinitesimales y nuevos infinitos.

Armenia, Colombia, Mayo 2020 (en tiempos de cuarentena al Covid-19).