Hacia un Nuevo Concepto en Educación Matemática

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío*

"Las directivas de las escuelas no saben en que consisten las matemáticas, ni lo saben los educadores, ni los autores de los textos, ni las editoriales, y tristemente aun, ni la mayoría de los profesores de matemáticas. La dimensión del problema es de tal magnitud que no se sabe en donde empieza."
Paul Lockhard. Lamento de un matemático[1].

"Quienquiera desee alcanzar la fuente tiene que bogar a contracorriente". Antiguo proverbio chino.

2000 Mathematics Subject Classification 97D20.

Resumen: El desequilibrio entre lo que se enseña y el frente de las matemáticas y sus aplicaciones es tan grande que obliga a auto cuestionarnos en relación a lo que hemos venido enseñando. En este artículo se critica las matemáticas en los actuales currícula y se propone la búsqueda de alternativas para remediar el enorme atraso de la educación matemática con respecto a las matemáticas que sirven de herramienta a las nuevas tecnologías. Se propone, además, un modelo encaminado a modernizar la enseñanza que tome en cuenta, elementos de lo que llamo currículo Kronecker y currículo Davydov, dentro de un enfoque orientado a estructurar matemáticamente la mente del futuro ciudadano.

Abstract: The unbalance between the math we are teaching and the front of mathematics and its applications is so huge that we have to question ourselves about what we have been teaching through the many past generations. In this paper we criticize K-12 math curricula and we propose to reach for new alternatives to remediate the huge gap between math education and mathematics behind new technologies. We suggest besides, a new curriculum which combines central ideas from curricula that I call Kronecker and Davydov in order to structure mathematically the mind of the future citizen.

Introducción.

Quisiera advertir que el tema a tratar en este artículo está relacionado con los contenidos matemáticos en el currículo de la educación básica y no trata propiamente de los currícula en general. Me referiré aquí a los enfoques, que llamaré de Kronecker, basado en la concepción de que los números reales proceden de los naturales por un proceso genético y al enfoque de Davydov, para el cual los números reales tienen existencia intuitiva en los niños, y los números naturales tan sólo son una parte de ellos.

Entre los grandes retos que se proponen los profesores de matemáticas en la educación media es integrar la historia de las matemáticas al proceso de enseñanza de las mismas. Desafortunadamente este loable objetivo no se logra por una razón ajena al proceso mismo de la transmisión del conocimiento: la historia que se cuenta poco o nada tiene que ver con las matemáticas que se enseñan. Resulta que seguimos enseñando lo mismo desde hace más de doscientos años y eso está, históricamente hablando, en la prehistoria con relación a las matemáticas de nuestro tiempo.

---

[1] Este artículo aparece en la red y su lectura fue sugerida por Keith Devlin en su columna Devlin´s Angle de la Mathematical Association of America (MAA). Las pasadas columnas se pueden leer usando el enlace: http://www.maa.org/devlin/devangle.html . La traducción al español de algunas columnas recientes se puede ver en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/filosofia.htm

Las matemáticas que hoy se enseñan desconocen los resultados logrados por los grandes matemáticos del siglo XVIII, entre ellos Euler y Lagrange, y parece, a la luz de los currícula de educación básica[2], que matemáticos como Gauss, Riemann, Weierstrass, Dirichlet, Klein, Poincaré o Hilbert, para citar sólo unos pocos nombres, nunca hubieran existido. La pregunta que uno se hace es: ¿por qué las matemáticas que se enseñan no integran el conocimiento que los matemáticos nombrados aportaron a las matemáticas? La respuesta según mi apreciación, está en el hecho que las matemáticas básicas que se enseñan, según sus contenidos y enfoques, son anacrónicas en el sentido de que son técnicas y resultados apropiados para épocas pasadas y no para educar a un ciudadano que vive en la cresta de la revolución informática.

Si las matemáticas que se enseñan son anacrónicas, entonces, ¿qué hacer para actualizar contenidos o enfoques de tal manera que la enseñanza de hoy esté a tono con los tiempos que vivimos y más aun con la época que van a vivir nuestros estudiantes? Respuestas a interrogantes como éste, no son fáciles de hilvanar en un corto trabajo como el presente; sin embargo trataremos de aproximarnos a algunas respuestas y plantearemos algunas inquietudes orientadas a indagar sobre el tema.

Algo sobre Aritmética.

En otro artículo[3] hago la diferenciación entre *Aritmética* y *Logística*, y de cómo se concebían las dos disciplinas en tiempos de Pitágoras, Aristóteles y Euclides y de cómo, la mayor parte de los profesores en la educación básica hacen énfasis en la segunda y descuidan la primera.

Empecemos por decir que las matemáticas, en su concepción histórica y filosófica, no nacen ni se hacen en razón a sus aplicaciones. Las matemáticas son un arte, cuya apreciación como tal, exige un aprestamiento, un entrenamiento y una maestría, a la que desafortunadamente no todo ciudadano llega, en gran medida a consecuencia de una inapropiada enseñanza a lo largo de su formación básica. No significa que las matemáticas no tengan aplicaciones, las tiene en casi todas las áreas del conocimiento. Lo que pasa es que las matemáticas no deben confundirse con sus aplicaciones. Y desgraciadamente eso es lo que ocurre en la enseñanza a lo largo del ciclo básico y aun, y con más énfasis en la educación universitaria, como lo veremos más adelante.

La aritmética en su concepción histórica corresponde a la t*eoría de números* y es la parte de las matemáticas de mayor historial, donde matemáticos desde la época de Platón y Aristóteles hasta hoy han mostrado su talento y nos han legado teorías, tan fascinantes como la teoría de los números primos que viene desde Euclides y sigue con Terence Tao[4] en nuestros días, y la teoría de las ecuaciones diofantinas, iniciada por Diofanto de Alejandría y ha continuado expandiéndose con magníficas aportaciones, como las de Martin Davis en conexión con el Décimo Problema de Hilbert[5].

---

[2] En este artículo entenderemos por educación básica, la formación académica que se imparte en la primaria y el bachillerato, más o menos el equivalente a los currícula K-12 de los países anglosajones.

[3] *Logística versus Aritmética* en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos.htm

[4] Uno de los Medallistas Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos, Madrid. 2006.

[5] David Hilbert (1860-1943) propuso en 1900, 23 problemas que señalan un hito en la historia de las matemáticas. El décimo de ellos pregunta por un algoritmo para decidir si una ecuación diofantina tiene o no solución.

La concepción generalizada sobre aritmética es que trata de los números y las cuatro operaciones y claro las aplicaciones a las cuentas del mercado, al cuadre de los extractos de las tarjetas, los porcentajes, los impuestos, los descuentos, etc. Cuando se reduce la aritmética sólo a esto, no es necesario ir a la escuela, ni estudiar historia de las matemáticas; basta leer el manual de instrucciones de la calculadora de bolsillo, practicar mucho y ya. La verdadera enseñanza de la aritmética debería empezar con la obra de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) *Disquisitiones Arithmeticae*[6], donde se desarrolla la teoría de las congruencias que generaliza el concepto de igualdad y lleva a temas aritméticos y algebraicos de alto vuelo como el teorema de reciprocidad cuadrática y el teorema fundamental del álgebra.

En general las tendencias actuales sobre educación matemática se podrían clasificar en dos categorías[7]: las que siguen el modelo de Kronecker de la construcción genética de los números y aquellas que se acomodan al modelo de Davydov, donde el punto de partida es el hecho de considerar que, la apreciación de los números reales es innata a la mente de los niños y que se puede, a partir de aquí desarrollar la aritmética y el álgebra que tradicionalmente se estudia en la educación básica. Una tercera categoría, de la cual daré aquí unas puntadas, combina las dos tendencias: iniciar con lo discreto, a través del juego hasta llegar al árbol binario y a partir de allí dar el salto a lo continuo, al expresar todo número real como una expansión binaria, creando en el tope del árbol binario la densidad suficiente para hacer análisis matemático y desde luego cálculo diferencial e integral.

Este nuevo enfoque permite llegar a resultados avanzados sin menoscabo del rigor matemático que los mismos exigen. Empezando temprano se puede lograr objetivos importantes. En el preescolar se deben dar las bases del aprestamiento pre-matemático: nociones intuitivas de orden, secuencia, dirección, sentido y orientación. En los primeros años de la educación básica se estudiarán los números en sus propiedades elementales: su apreciación y construcción a través de simbolismo primario, bases numéricas que conducen directamente hacia los polinomios y sus propiedades características; congruencias y clases residuales que llevan a las tablas de multiplicar, las ecuaciones lineales y al algoritmo de Euclides. En el bachillerato se entraría a estudiar estructuras algebraicas y topológicas y a desarrollar las primeras nociones de análisis matemático ligadas a problemas de representación de la realidad física en términos de lenguaje matemático como las transformadas de Fourier, la transformada de Haar y las Wavelets, conceptos que explican la transmisión de la información audiovisual que circula en Internet y la razón de ser, en su estructura matemática, del teléfono celular, el *iPod* y demás maravillas tecnológicas que hoy son parte de nuestro menaje personal.

Algo sobre Álgebra.

No existe razón pedagógica ni metodología que impida introducir el álgebra desde los primeros años de la educación básica. Al álgebra se llega simultáneamente con la representación del número, primero a través de los polinomios que son la representación natural de cualquier número real en cualquier base y segundo a través de las congruencias que se ambientan en la primaria. Las congruencias lineales son fáciles de introducir a través de problemas concretos al alcance del niño. De las congruencias se pasa a las ecuaciones sin ninguna dificultad y con ellas se plantean y resuelven muchos problemas originados en su

[6] Hay edición en español, editada por la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá, D. C. 1995.

[7] Más sobre esta clasificación puede verse en el artículo de K. Devlin de la MAA. Traducción al español puede leerse en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/filosofia.htm .

propio mundo. Al dar el salto a las ecuaciones de mayor grado se busca inducir al estudiante a la formulación de problemas profundos como la solución de ecuaciones a través de radicales para hablar de la teoría de Galois y de los trabajos en este tema de Niels Abel. Y claro, se debe hablar del trabajo de Gauss alrededor del teorema fundamental del álgebra.

Uno de los problemas que enfrentamos en el pasado al enseñar lo que se llamó *matemática moderna*, fue la forma abstracta y por decreto de introducir las famosas *estructuras*, como grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, etc. En la nueva propuesta, las estructuras aparecen naturalmente como consecuencia de la introducción de los polinomios en la primaria y los espacios vectoriales en la secundaria en conexión con la física y la geometría en espacios de Hilbert. Los polinomios son una plataforma muy útil para inducir a los alumnos hacia la comprensión de estructuras algebraicas y topológicas de alto nivel, perfectamente entendibles por estudiantes de educación básica.

Algo sobre Geometría.

Culturas antiguas, científicamente avanzadas, han buscado explicar racionalmente su mundo y su entorno. Los matemáticos griegos de los siglos VII al IV antes de Cristo buscaron las leyes que rigen el devenir de los fenómenos naturales. La aparición de las matemáticas se explica en ese proceso racional de entendimiento del mundo y de los mecanismos que rigen el pensamiento humano. La geometría euclidiana, cuyo origen se pierde en la prehistoria, intenta retratar un mundo que para los primeros matemáticos aparecía plano en principio o cúbico localmente, como quien vive en una celda de tres dimensiones en la que nada tiene que ver el mundo físico (esférico y sujeto a la gravedad). Este fue el marco en donde se escribieron los Elementos de Euclides, un compendio de la sabiduría matemática de los primeros griegos. La geometría de Euclides no tiene en consideración el mundo real, es una geometría para un mundo inexistente.

Los topógrafos, y en menor medida los maestros de obra que construyen una casa, conocen en forma empírica que, la geometría real (de nuestro mundo físico) es la geometría de Riemann. Un topógrafo se orienta con el teodolito (empieza con el azimut, para referenciar el norte) y con la plomada (buscando el centro de la tierra). Un maestro de obra usa la plomada y el nivel cuando quiere trazar rectas, que en su caso son segmentos de recta en la geometría de Riemann de la superficie esférica de la tierra, o mejor segmentos de circunferencias máximas y busca la superficie de Gauss (superficie de nivel, donde el trabajo desde el punto de vista de la física, es cero). ¿Por qué este maestro de obra que ignora las matemáticas usa geometría de Riemann, mientras los profesores de la educación básica la desconocen por completo? Esta es la gran ironía, el profesor enseña lo que a él le enseñaron para que sus alumnos sigan enseñando lo mismo. Poca reflexión y si, mucha rutina y memorización.

Con una geometría así, para qué historia de las matemáticas. No hay cabida para la geometría de Gauss-Lobachevsky-Bolyai, menos para la geometría de Riemann, ni para la clasificación de las geometrías según Klein, como si esos famosos matemáticos no hubieran existido. ¡Tantas cosas interesantes que se dejan de enseñar por desconocimiento de las genuinas matemáticas! La geometría que desarrollaron los matemáticos italianos a fines del siglo XIX vale la pena mencionarla y la geometría que se puede hacer en variedades como en el toro o en la cinta de Möebius tiene sus encantos que seguramente a estudiantes jóvenes va a entusiasmar y motivar para seguir adelante con las matemáticas.

La Conjetura de Poincaré, uno de los grandes problemas del siglo XX, fue resuelta hace pocos años y tuvo un despliegue a nivel mundial[8]. Sin embargo el profesor de matemáticas desconoce la conjetura y aun no sabe la calidad de matemáticas que el filósofo y matemático francés creo. ¿Cómo hacer historia de las matemáticas, por ejemplo, desconociendo la teoría de Poincaré-Bendixon o Lyapunov en estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales o cómo contar la historia de los fundamentos de las matemáticas si desconocemos lo que lograron Frege, Russell, Hilbert, Brouwer o Gödel? Volvemos a lo mismo: ¡el profesor de matemáticas básicas desconoce las matemáticas!

Algo sobre Análisis Matemático.

El concepto de infinito empieza temprano en la filosofía y las matemáticas griegas. Las paradojas de Zenón que involucran el concepto de infinito, son el mejor ejemplo de cómo las matemáticas entraron a la cultura, desde los primeros asomos de la ciencia. Esto sugiere que el infinito (al menos en su sentido potencial) es en cierto aspecto, fácilmente aprehensible intuitivamente. Cuando introducimos el árbol binario[9] en los primeros años de la escuela elemental ya se tiene a mano, además de un fractal, un conjunto de infinitos puntos, como el conjunto de los números reales, donde podremos además de hacer cálculo diferencial e integral, introducir espacios abstractos como espacios de Banach y espacios de Hilbert y ampliar nuestro conocimiento a espacios topológicos asociados a conceptos como la continuidad.

La enseñanza del cálculo se quedó en rutinas como integración o diferenciación, que fueron claro, grandes logros en la época de Leibniz, Newton y de los primeros Bernoulli hace trescientos años, pero nos olvidamos de los refinamientos y rigor impuestos por Cauchy, Riemann, Dirichlet y Weierstrass, quienes mediando el siglo XIX fueron las luminarias de las matemáticas. Nada se dice acerca de la crisis surgida comenzando el siglo XIX cuando aparecen las series de Fourier en la solución de una ecuación diferencial aparentemente simple, ni tampoco de la necesidad de revisar el concepto de integración que lo va a hacer Henri Lebesgue empezando el siglo XX. Y qué decir de la introducción del cálculo en varias variables, de espacios métricos, y la generalización de las geometrías a dimensiones mayores que tres, o a dimensiones fraccionarias donde aparecen los conjuntos fractales de los cuales tanto se habla hoy, a pesar de que pasaron por las mentes y las manos de Gaston Julia y Félix Hausdorff hace casi cien años.

El análisis matemático involucra al cálculo diferencial e integral adicionado con abstracciones más allá de nuestro mundo físico, pero que para el matemático es su coto de caza y que a través de su empeño busca ampliar, no únicamente para su propia satisfacción y regocijo, sino para dejar su disfrute y escrutinio a las nuevas generaciones de matemáticos por venir. Considero que la enseñanza del cálculo circunscrita al contenido de esos enormes mamotretos que circulan como textos, está viviendo sus últimos días, porque los mismos matemáticos se propusieron lograr a través de las matemáticas crear sustitutos a esos esperpentos, con programas de computador que hacen todas las rutinas preconizadas en esos textos y mucho más, como es la prueba automática de teoremas. Y esto no es nada nuevo. Desde que se inició la teoría de la computación en los años de 1930, con Gödel, Turing y

[8] Descripción e historia de esta conjetura aparece en mi artículo: *La Conjetura de Poincaré y los Juegos de Infancia* y se puede descargar de : www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

[9] Para formarse una idea de un árbol binario y de un fractal puede consultarse mi artículo: *Del Bit a las Wavelets. Hacia un radical cambio en la Enseñanza de las Matemáticas.* www.matematicasyfilosofiaenelaula.info .

Church, entre otros, ya se esperaba que las máquinas pudiesen hacer pruebas de teoremas. Esto, en tiempos pretéritos, se pensaba que era privativo de la inteligencia humana.

Desde que el marqués de L´Hôpital le copió el trabajo a Johann Bernoulli sobre el cálculo infinitesimal, y creo los textos de cálculo, se inauguró la larga y oscura noche del análisis matemático, por cuanto que, de allí en adelante, empezaron a perpetuarse los libros de texto de cálculo, que tanto daño han hecho a los posibles candidatos a ser buenos matemáticos, por cuanto que esos textos han querido mostrar que las matemáticas son esa enorme lista de aplicaciones a todo lo habido y por haber. Cuando uno toma un libro de cálculo de los tantos que circulan hoy, va a encontrar un desfile incoherente de teoría sin mayor rigor, teoremas y demostraciones insulsas que el estudiante no entiende, y en estricto honor a la verdad, no son tan rigurosas como pretenden ser. Toda esa maquinaria oxidada de los ε´s y δ´s que pretenden dar rigor a las demostraciones sobre límites y continuidad no puede ser digerida, y consecuentemente los estudiantes se quedan con las ideas intuitivas que el profesor les exhibe con sus dibujos en el tablero.

Aun más, los libros que pretenden ser libros de cálculo para ingeniería o para las ciencias administrativas o para la biología o qué sé yo más, no enseñan ni cálculo, ni ingeniería, ni ciencias administrativas y menos biología. Esos libros son generalmente escritos por autores que desconocen las matemáticas y las áreas a las cuales dicen servir con sus aplicaciones. Me he convencido que no se aprenden matemáticas tratando de mostrar que ellas, sirven para algo específico. Las matemáticas conforman una disciplina coherente que estructura el espíritu y que capacita a los que la estudian para aplicarla en la medida en que ellos van aprendiendo áreas en las cuales, las mismas tienen aplicaciones. Resumiendo, tanto profesores como alumnos deben tener criterio matemático, cuando los primeros tratan de enseñar a los segundos un área específica del conocimiento; llámese física, química, biología, resistencia de materiales, estadística, etc.

Conclusiones.

Si usted lector ha tenido la paciencia de llegar hasta este punto probablemente estará de acuerdo en que las matemáticas, no son lo que sus profesores en la educación básica le enseñaron o trataron de enseñarle. En efecto las matemáticas tienen que enseñarse con otros contenidos y otras metodologías que realcen la belleza que se oculta en resultados tan sencillos como la prueba de la infinitud de los números primos o en la profundidad de teoremas tan cruciales como los de incompletitud de Gödel, para citar dos famosos teoremas de las matemáticas, distanciados el uno del otro por un lapso de dos mil trescientos años.

Pero entonces ¿Qué hacer para actualizar y poner sobre un contexto coherente a la educación matemática? Aquí como en otros artículos de mi autoría, respondo: no hay soluciones fáciles, sólo hay alternativas inteligentes. Una alternativa que propongo para el escrutinio de maestros y matemáticos es el enfoque al que he hecho mención, una especie de simbiosis entre el currículo que llamo de Leopold Kronecker y el propuesto por el psicólogo ruso Vasily Davydov y que desarrollo un poco en mi ponencia para el XVI Congreso Nacional de Matemáticas, Cali 2009: "*Del Bit a las Wavelets: Hacia un radical cambio en la enseñanza de las matemáticas*", ya citado y que puede leerse en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias.htm .