Matemáticas y Humanismo

Diego Pareja Heredia.

Abril 2007

De la Fantasía 6.19 de S. Shelah a la hipótesis del continuo. O mejor ¿Cuántos ángeles pueden bailar en la cabeza de un alfiler?

Edward Kasner y James Newman introdujeron en su libro *Mathematics and the Imagination*[1], dos números, considerados en su tiempo, como colosales. Al primero lo llamaron *googol* y al segundo, *googolplex,* definidos como:

$$1 \text{ googol} = 10^{100} \qquad\qquad 1 \text{ googolplex} = 10^{googol} = 10^{10^{100}}.$$

Aunque en matemáticas aparecen números mayores con propósitos definidos, estos números los traigo a colación, porque hace poco el famoso lógico, Saharon Shelah, propuso, entre otras fantasías, la elaboración de una teoría matemática razonable, restringida a un tamaño, que no sobrepase un número natural n dado, o siendo más realistas, que se acomode en cierto aspecto, a las dimensiones del universo conocido. Un número n como:

$$2^{2^{100}}+1.$$

Este número[2], aunque grande, es menor que un googolplex. El último sueño propuesto por Shelah, en su artículo *Logical Dreams*[3], el rotulado con el número 6.19, sugiere buscar una agenda de trabajo, que tome en cuenta esa cota, para así, desarrollar unas matemáticas, dentro de ese marco, donde la lógica, desde luego, no tenga que afrontar los retos que implica manejar procesos infinitos. Desde el punto de vista práctico la idea suena interesante. Sin embargo, la gran riqueza de las matemáticas, especialmente desde el tiempo de Newton y Leibniz, está precisamente, en introducir en las matemáticas números infinitamente pequeños e infinitamente grandes. El análisis matemático y la teoría de medida, toman como punto de partida, conjuntos de potencia infinita.

---

[1] KASNER, E. et al. *Mathematics and the Imagination.* Dover. New York. 2001. La edición original la publicó Simon and Schuster en los cuarentas del siglo pasado. Hay traducción al español.

[2] Fermat estudió este tipo de números, con la variable n, en el exponente exterior, y conjeturó que todos ellos, eran primos. Euler mostró que el sexto de la lista se deja dividir por 641. No se sabe de más números de Fermat primos salvo los cinco primeros, **3, 5, 17, 257** y **65537**. Para mayores detalles sobre los números de Fermat, visitar la columna de Ed Sandifer *How Euler Did it* (marzo 2007) en www.maa.org

[3] SHELAH, S. *Logical Dreams*. Bulletin of the American Mathematical Society (New Series). Vol. 40, No. 2. April. 2003.

Al restringir el alcance de las matemáticas a números finitos, indudablemente, saldríamos primero, de la maraña conjuntista en la que nos metió Georg Cantor, desde fines del siglo XIX, y de otro lado, obviaríamos, el problema de rastrillar los berenjenales de las enormes jerarquías acumulativas, en busca del *axioma del cardinal límite* propuesto por Gödel para probar (o disprobar) la hipótesis del continuo (CH).

Pero antes de seguir, tomémonos la osadía de dar respuesta (medio en serio y medio en broma) al interrogante que Hugh Woodin formula, en uno de sus artículos[4] : ¿*Cuántos ángeles pueden bailar en la cabeza de un alfiler*?[5] Con ayuda de un texto de análisis básico, por ejemplo, el de Royden[6], podemos encontrar una respuesta poco convencional. La cabeza de un alfiler, no importa lo pequeña que sea, puede albergar perfectamente, a todo el conjunto de los números reales, incluyendo a $-\infty$ y a $+\infty$, En efecto, se puede probar, recurriendo al teorema de compactificación de Alexandroff que los reales se pueden sumergir a través de una biyección, en uno de los diámetros de la cabeza del alfiler, digamos en el intervalo [-1, 1]. Quedan aún sobrando, todos los demás, incontablemente infinitos, diámetros, que cubren el círculo. Por lo tanto, al igual que los números reales, los ángeles, como seres inmateriales, que no ocupan espacio, tendrían todo el círculo, para su danza celestial. Así la respuesta al angelical problema podría ser: *En la cabeza de un alfiler pueden bailar, al menos, tantos ángeles, como números reales hay*. Si aceptamos la hipótesis del continuo, que veremos más adelante, pueden bailar, al menos $\aleph_1$ ángeles. Para redondear la respuesta tendríamos entonces, que indagar sobre cuántos, números reales hay.

Cantor respondió a la pregunta de cuántos números reales hay, probando que hay más, de los que se pueden contar con el conjunto **N**, de los números naturales[7]. Al no poder establecer una biyección, entre los reales y los números naturales, Cantor decidió asociar con los números reales un cardinal (número de elementos) mayor que aquel $\aleph_0$ [8], ya adscrito a los números naturales. Puesto que todo número real se puede expresar como una sucesión infinita de 0´s y 1´s[9], el cardinal (o la potencia, como a veces se dice) de **R**, será igual al número de sucesiones de este tipo, el cual viene dado por

$$2^{\aleph_0}\ .$$

La razón por la cual encontramos este número es que, para escoger, en el conjunto {0,1,} el primer dígito binario para cada real, hay dos posibilidades; para el segundo dígito, las mismas dos posibilidades; y así hasta agotar todos los naturales (de potencia $\aleph_0$); por lo cual encontraremos:

[4] WOODIN, W. H. *Large Cardinal Axioms and Independence: The Continuum Problem Revisited.* The Mathematical Intelligencer. Vol. 16. No. 4. Summer 1994.
[5] Esta fue una pregunta que circuló entre los teólogos de la edad media, cuando las discusiones bizantinas estaban al orden del día, y que sirvió de motivación para una película en 1999.
[6] ROYDEN, H. L. *Real Analysis*. The Macmillan Company. Toronto. 1968.
[7] Igual ocurre con los enteros, los racionales o aún, con los números algebraicos, que aparentemente lucen más numerosos. Uno de los grandes logros de Cantor fue mostrar que todos estos conjuntos son enumerables, en el sentido de poderse establecer una biyección (una correspondencia biunívoca) entre cada uno de ellos y los números naturales.
[8] $\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo.
[9] De igual forma que se puede expresar un número real en base diez, uno puede hacerlo en forma binaria. Esta representación es única salvo repetición continua de 1´s. Por ejemplo 0.1111… = 1.0000… .

$2 \times 2 \times 2 \times \ldots$ posibilidades de dotar a cada real, de sus infinitos dígitos. Ese valor es precisamente el número, dado arriba. El conjunto de todas las funciones de **R** en **R**, tendrá, desde luego, un cardinal mayor que el de **R** y a medida que avanzamos en este proceso se irán creando cardinales cada vez mayores. Se sigue de aquí que habrá infinitos cardinales transfinitos. Cantor denotó por $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, … , el conjunto de todos los cardinales transfinitos, donde $\aleph_0$, el cardinal de los números naturales, es el menor de ellos. Como aparece esta sucesión de cardinales, sugiere de entrada que, entre dos cardinales sucesivos, no existe ningún otro; como entre 1 y 2 no hay ningún natural. Suponer que cada cardinal de esta lista es el siguiente del que le precede, en el orden lineal, es un salto al vacío. Y en ese salto seguimos, desde cuando el matemático alemán, propuso la hipótesis de que el siguiente cardinal transfinito después de $\aleph_0$, tenía que ser el cardinal de los números reales. Simbólicamente:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

Siguiendo a Hilbert, se hizo costumbre denotar con *c*, al cardinal del continuo, o cardinal de los números reales. Así la hipótesis del continuo se reduciría a la igualdad:

$$c = \aleph_1.$$

Así de simple es la hipótesis de Cantor o *hipótesis del continuo*, que nos tiene en ascuas, desde que David Hilbert la propuso a la comunidad matemática reunida en Paris en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900. Es el número uno, de la lista de veintitrés problemas dejados por su generación a las generaciones que le sucedieron. Para Hilbert, el problema está bien formulado en el lenguaje inteligible de las matemáticas, y en concordancia con su filosofía, debe tener una solución, positiva, negativa, o una prueba de su indecibilidad. En matemáticas, *no hay ignorabimus,* decía.

Por la forma en que los cardinales aparecen en la lista, de menor a mayor, y sabiendo, como el mismo Cantor probó, que,

$$\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$$

Surge otra conjetura. Ésta se conoce como, la hipótesis generalizada del continuo (GCH), la cual afirma que:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Donde $\aleph_\alpha$ es un cardinal transfinito arbitrario, en la lista de Cantor. Con esto se cierra, en forma abrupta, la puerta de entrada a otros cardinales transfinitos, al paraíso de Cantor, como Hilbert llamó a la teoría originada en los trabajos del matemático alemán en estos temas.

La teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel-Axioma de Elección (ZFC, por su sigla en inglés) es la teoría básica, donde se formula la hipótesis del continuo. El primer avance en la conexión de la hipótesis del continuo con ZFC, lo hizo Kurt Gödel, al probar que ZFC+CH es consistente, siempre que, ZFC también lo sea. Veinte años más tarde, Paul Cohen, complementó el resultado, al demostrar, usando *forcing*, que si ZFC es consistente, también lo es la teoría ZFC + ($\neg$CH), donde $\neg$CH corresponde a la negación de la hipótesis del continuo. Con esto, se prueba la independencia de CH en la teoría de conjuntos. Hasta aquí, la hipótesis del continuo juega un rol parecido al V postulado de la geometría elemental de Euclides, el cual resultó independiente de los otros axiomas y de allí, resultan dos tipos de geometrías, la euclidiana que acepta el postulado de las paralelas, y las geometrías no euclidianas, para las cuales, por un punto exterior a una recta pueden pasar más de una recta paralela a una dada, o ninguna, como ocurre en la geometría de Riemann.

Como consecuencia de los resultados de Gödel y Cohen se puede pensar en matemáticas con la hipótesis del continuo, o en su contraparte, aceptando la negación de la misma hipótesis. Con estos resultados el problema no se ha resuelto. La pregunta sigue viva. ¿Habrá una teoría de conjuntos en la cual la hipótesis del continuo o su negación, pueda deducirse lógicamente en el lenguaje de la teoría?

Trabajos recientes de varios lógicos, entre ellos, Shelah y Woodin, están encaminados a extender ZFC con axiomas (y hasta con esquemas axiomáticos) cada vez más poderosos, que involucran cardinales inaccesibles (y de todo tipo) enormes. Un resultado inesperado es el siguiente:

TEOREMA (***Foreman-Magidor-Shelah***)[10]. *Si se cumple el axioma del máximo de Martin, entonces:*

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2 .$$

Este axioma de Martin hace que se rompa la secuencia que Cantor esperaba, en la cual, el cardinal de **R** era alef sub-uno. Entonces, el orden preestablecido por Cantor en los cardinales transfinitos, al que nos referimos al principio, no es tan obvio como aparentaba ser.

Después de leer a Solomon Feferman[11] y a Saharon Shelah, entre otros, uno queda con la sensación de que, no es del todo aventurado, preguntarse, ¿es la *hipótesis del continuo un problema matemático, o un problema de teología, como es aquel de saber, cuántos ángeles pueden bailar en la cabeza de un alfiler?*

Diego Pareja Heredia es profesor de la Universidad del Quindío y antiguo colaborador de la revista *Matemática-Enseñanza Universitaria*, editada por el recordado profesor, *Yu Takeuchi.* Esta columna está proyectada para salir diez veces al año. Comentarios pueden enviarse a depehache@yahoo.es o visitando: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info .

---

[10] WOODIN, W. H. *The Continuum Hipotesis, Part I*. Notices of the American Mathematical Society. Vol. 48, No. 6. June/July 2001.

[11] FEFERMAN, S. Does Mathematics need new axioms? Texto de una conferencia presentada en el Joint Meeting AMS-MAA. San Diego, California. Enero1997.