Sintaxis y Semántica del Lenguaje Numérico desde la Escuela Elemental

Diego Pareja-Heredia. ***Universidad del Quindío***

Resumen

El lenguaje numérico empieza su desarrollo en etapas tempranas de la infancia. Este desarrollo va paralelo al lenguaje coloquial. Sin embargo, la enseñanza matemática tradicional no hace mayor énfasis en la sintaxis y en la semántica de este particular lenguaje numérico.

En este artículo deseamos mostrar, a través de algunos ejemplos, cómo, la sintaxis y la semántica son muy importantes para la comprensión elemental de los números, de sus propiedades y de las operaciones definidas en ellos.

Abstract

Numerical language begins its development at early stages of infancy. This development goes parallel with colloquial language. However, traditional math instruction does not give enough relevance to the syntax and semantics of numerical language.

In this paper we want to show, through some examples, how syntax and semantics are important for the comprehension of numbers, their properties and the operations defined on them.

Introducción. En este artículo, la palabra número se usará para significar número natural, al menos que se diga otra cosa.

El lenguaje numérico tiene una estructura con su propia sintaxis como lo tiene el lenguaje usual. El alfabeto para este lenguaje, en el caso de la representación numérica, es el conjunto de dígitos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Con este alfabeto podemos formar secuencias o numerales, digamos: $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$, cada una de ellas representando un número en particular. Cada secuencia de dígitos puede verse como un polinomio de una variable x del tipo:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0 = \sum_{j=0}^{j=n} a_{n-j} x^{n-j} \qquad [1]$$

Con la propiedad sintáctica

$$x^n = 10 x^{n-1}. \qquad [2]$$

Notamos aquí que, si $n = 1$, entonces, $x = 10$. Esto justamente significa que el lenguaje numérico usual es un lenguaje decimal.

La propiedad [2], arriba, da a nuestro lenguaje su típica característica: ser un sistema posicional. Esto es, la posición enésima en el numeral, contada de derecha a izquierda, y contando de cero a n, tiene un valor 10 veces mayor que la posición (n – 1). Llamamos a estas posiciones, contadas de derecha a izquierda: *unidades, decenas, centenas, unidades de mil, decenas de mil,* etc.

Tempranamente cuando niños descubrimos que las palabras que representan los números nos dan cierta información sobre ellos. Sin embargo, no siempre notamos que esta información puede llevarnos a propiedades que caracterizan al número o a un conjunto de números. Cuando por ejemplo oímos las palabras: *doscientos cincuenta y seis* y *ciento veintiocho*, simplemente traducimos estas palabras al lenguaje escrito como 256 y 128. Pero si supiéramos la sintaxis del lenguaje numérico, y recordando que $x = 10$, inmediatamente podríamos llevar estas palabras a representaciones algebraicas del tipo:

$$P(x) = 2x^2 + 5x + 6 = 2x^2 + 4x + (x + 6) = 2x^2 + 4x + 16 = 2(x^2 + 2x + 8) = 2Q(x).$$

Donde $Q(x)$ se define como,

$$Q(x) = x^2 + 2x + 8 = 10x + 2x + 6 = 12x + 8 = 2(6x + 4) = 2^2(3x + 2) = 2^2(32) = 2^2 2^5 = 2^7.$$

Y entonces podríamos concluir, entre otras cosas: 1) ambos números 256 y 128 son pares; 2) el primer número es el doble del segundo, y, 3) $256 = 2\times128 = 2^8$.

Sintaxis y Semántica en un Lenguaje Numérico.

En el parágrafo anterior podemos identificar algunos enunciados matemáticos típicos, como:

a) $P(x) = 2Q(x)$

b) $Q(x) = 2^7$

c) 256 and 128 son pares y además, $256 = 2^8$.

d) De la validez de *a*) y *b*) podemos concluir *c*).

Los enunciados de *a*) a d) constituyen en su totalidad una argumentación matemática, o mejor, una prueba del tipo: $p \wedge q \rightarrow r$.

Mientras que en los enunciados *a*), *b*) y *c*) se da relevancia a la sintaxis del lenguaje, en *d*) la característica dominante es la semántica. La semántica aquí, da significado a las frases con un criterio de veracidad.

En lenguaje matemático, la sintaxis es el conjunto de reglas que gobiernan la correcta formación de los números y de las frases relacionadas con ellos.

Además del alfabeto numérico mencionado antes, el lenguaje numérico requiere:

1. – Una lista de variables y símbolos para las conectivas lógicas. En el corto discurso matemático expuesto en las líneas anteriores, hemos usado variables como P, Q, x, p, q, r, y símbolos para las conectivas, tales como: $\wedge$ y $\rightarrow$, para significar conjunción e implicación.

2. – El signo de igualdad (=). Este signo nos permite crear cadenas de símbolos como: A = B = … = Z . Cuando en A definimos una o más operaciones aritméticas, como en **[1]**, los símbolos, B, …, Z, podrían ser una secuencia de pasos para arribar al final de determinado proceso. Imitando los términos del lenguaje de la computación, podemos decir que si A es el *Input,* Z *sería el Output.*

3. – Signos de Agrupación. Signos de agrupación como (), [], {} se usan en enunciados matemáticos para juntar símbolos o expresiones matemáticas.

4. – Cuantificadores. [Universal "$\forall$" y Existencial "$\exists$"]. Los cuantificadores en un leguaje especifican la variabilidad de las variables.

En el caso de $P(x)$ y $Q(x)$ usadas arriba, la variable x podría tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales, simbólicamente: $\forall(x)P(x)$, y, $\forall(x)Q(x)$. Sin embargo, estos polinomios no siempre representarían un número natural. Para representar números debemos usar $\exists(x)P(x)$, and, $\exists(x)Q(x)$, puesto que así podemos escoger $x = 10$, para lograr los números requeridos.

5. – Parámetros Primitivos. En teoría de números formalizada es usual tener unos parámetros primitivos, o, elementos no definidos tales como: 0, 1, +, ×, para designar operaciones e importantes elementos aritméticos[1]. Hemos usado arriba expresiones como

$$P(x) = 2x^2 + 5x + 6, \text{ y, } Q(x) = x^2 + 2x + 8$$

Donde todos los parámetros primitivos están implícita o explícitamente incluidos. Más exactamente, $P(x)$ y $Q(x)$ representan expresiones como:

$$P(x) = (1 + 1)\times x\times x + 5\times x + 6\times x^0 = 2\times x\times x + 5\times x + 6\times 1, \text{ and, } Q(x) = x\times x + (1 + 1)\times x + 8\times x^0.$$

En ambos casos todos los parámetros primitivos están presentes explícitamente.

Ejemplo. Recordemos que los polinomios decimales se caracterizan por tener todos sus coeficientes tomados del conjunto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Estos polinomios representan en forma única cada número. Sin embargo, podemos hallar toda una familia de polinomios *no decimales* representando a un mismo número.

Tomemos como muestra el número $s = 53$. El polinomio decimal asociado al número s es $S(x) = 5x + 3$. Otros polinomios no decimales que pueden representar a s podrían ser: $4x + 13$, $3x + 23$, $2x + 33$, $x + 43$, como también 53. Todos ellos son diferentes pero cuando cambiamos a x por 10, invariablemente encontramos el número 53.

Ensayemos ahora con $t = 2647$. Su polinomio decimal es $T(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x + 7$. Aplicando la propiedad sintáctica [2], podemos reemplazar x^3 por $10x^2$ y encontramos:

---

[1] Ver mis notas de Epistemología de las matemáticas en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/David%20HIlbert%20y%20el%20Formalismo.pdf

$2647 = T(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x + 7 = x^3 + x^3 + 6x^2 + 4x + 7 = x^3 + 10x^2 + 6x^2 + 4x + 7$

$= x^3 + 16x^2 + 4x + 7$.

Este último polinomio es numéricamente equivalente a $T(x)$, puesto que

$10^3 + 16\times10^2 + 4\times10 + 7 = 1000 + 16\times100 + 4\times10 + 7 = 1000 + 1600 + 40 + 7 = 2647$

También podemos expresar $T(x)$ como:

$T(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x + 7 = 2x^3 + 5x^2 + x^2 + 4x + 7 = 2x^3 + 5x^2 + 10x + 4x + 7 = 2x^3 + 5x^2 + 14x + 7$.
Al reemplazar $x = 10$, vemos de nuevo que: $2x^3 + 5x^2 + 14x + 7 = 2000 + 500 + 140 + 7 = 2647$

Esta forma de representar los números nos permite con la ayuda de la propiedad básica [2], practicar la adición y la multiplicación sin hacer uso explícito de los tradicionales algoritmos.

La estructura interna de la Representación Numérica Decimal.

En lugar de comprometer al estudiante a repetir y repetir algoritmos aritméticos es más gratificante entender la estructura sobre la cual se soporta la representación decimal de los números, cuyo núcleo se centra en la fórmula [1].

Con la expresión

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0 = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_0 10^0 \qquad [\ 3\ ]$$

Estamos definiendo el número cuyos dígitos, en su orden, son $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, en términos de una secuencia de productos y sumas. Los productos que aquí se muestran son los más simples de todos: los múltiplos de las potencias de diez. Consecuentemente, la “suma” será muy fácil de calcular. Los términos con que designamos el número nos dará el valor de esa suma.

Tomemos por ejemplo el número 479, asociado a las palabras *Cuatrocientos Setenta y Nueve*, que corresponde según la fórmula [3], a:

$479 = 4\times10^2 + 7\times10^1 + 9\times10^0 = 4\times100 + 7\times10 + 9\times1 = 400 + 70 + 9 =$ (cuatrocientos setenta y nueve; omitiendo los signos +).

Según nuestra sintaxis, la *secuencia de dígitos* 479, tiene un valor de 400 + 70 + 9 y de acuerdo a nuestra semántica, esta secuencia tiene como significado el número *Cuatrocientos Setenta y Nueve.*

Producto Interno. En [3] observamos cierta regularidad en la composición de los dígitos y las potencias de diez. El primer dígito de izquierda a derecha está asociado con la mayor potencia de diez y estas potencias van disminuyendo hasta la potencia cero de diez que por definición es 1. En otras palabras, el arreglo $(a_n , a_{n-1} ,\dots , a_1 , a_0)$ está asociado al arreglo $(10^n , 10^{n-1} , \dots, 10^1 , 10^0)$ y el resultado de esta asociación corresponde a la larga suma de la derecha de [3].

La forma de escribir los "arreglos" mencionados arriba nos recuerda la notación vectorial. En efecto, la larga suma de arriba no es otra cosa que el llamado producto interno (producto escalar o producto punto) de dos vectores. Más precisamente:

$$(a_n , a_{n-1} ,\dots, a_1 , a_0) \bullet (10^n , 10^{n-1} , \dots, 10^1 , 10^0) = a_n \times 10^n + a_{n-1}\times 10^{n-1} + , \dots , + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

El producto interno, notado por "•", juega un rol importante en los espacios de Hilbert.

Este producto debería enseñarse en la escuela elemental, inclusive antes de introducir los algoritmos tradicionales para las operaciones aritméticas (heredados de la edad media). El producto interno da en forma natural, el valor exacto de los dígitos en el numeral.

Como ilustración miremos el numeral 5384 (la secuencia ordenada de dígitos 5 3 8 4) que proviene del producto interno:

$$(5 , 3 , 8 , 4) \bullet (10^3 , 10^2 , 10^1 , 10^0) = (5, 3 ,8 , 4) \bullet (1000 , 100 , 10 , 1) = 5\times 1000 + 3\times 100 + 8\times 10 + 4 = 5000 + 300 + 80 + 4.$$

En consecuencia, 5384 se expresa en palabras como: *Cinco Mil Trescientos Ochenta y Cuatro.*

Como hemos notado, los números en palabras nos dan la suma de todos los múltiplos de las potencias de diez que aparecen a la derecha de [3]. Es bueno entonces conocer un poco más de los múltiplos de estas potencias de diez.

Usemos de nuevo notación vectorial para representar las sucesivas potencias de diez, como un vector de dimensión $(n+1)$,

$$(10^n , 10^{n-1} , \dots , 10^1 , 10^0).$$

Si definimos la suma de dos vectores como el vector formado por la suma de sus componentes en el orden respectivo, el vector anterior puede expresarse como:

$$(10^n , 10^{n-1} , \dots , 10^1 , 10^0) = (10^n , 0 , \dots , 0 , 0) + (0 , 10^{n-1} , \dots , 0 , 0) + \dots + (0, 0, \dots , 10^1 , 0) + (0 , 0 , \dots , 0 , 10^0).$$

El conjunto de vectores a la derecha del signo igual, es un conjunto con una propiedad particular: el producto interno de cualquier par distinto de ellos da cero. Conjuntos de este tipo se llaman ortogonales. Así que el conjunto,

$$\mathbf{S} = \{(10^n , 0 , \dots , 0 , 0) , (0 , 10^{n-1} , \dots , 0 , 0) ,\dots, (0, 0, \dots , 10^1 , 0) , (0 , 0 , \dots , 0 , 1)\} \qquad [\ 4\ ]$$

Es un conjunto ortogonal, donde el ultimo vector cuenta las unidades, el anterior las decenas y así sucesivamente de derecha a izquierda, las centenas, las unidades de mil, etc.

Este conjunto nos permite conocer el valor de cada dígito en el numeral. Por ejemplo, si tenemos el número 437, el conjunto ortogonal S, asociado a este número es:

$$\mathbf{S} = \{(10^2, 0, 0); (0 , 10 , 0); (0 , 0 , 1).$$

Usando el producto interno del vector (4,3,7) por cada uno de los vectores de **S**, encontramos

(4,3,7) • (100,0,0) = 4×100 + 3×0 + 7×0 = 400. Esto significa que el primer dígito del numeral 437 tiene un valor de 400.

(4,3,7) • (0,10,0) = 4×0 + 3×10 + 7×0 = 30. Así el segundo dígito vale 30 y finalmente,

(4,3,7) • (0,0,1) = 4×0 + 3×0 + 7×1 = 7. Lo que significa que el último dígito tiene un valor de 7 unidades.

Como mencionábamos antes, la adición de dos vectores es el vector que resulta de la suma de las componentes en su orden. Para propósitos prácticos identifiquemos números con vectores. Si uno de ellos tiene menos dígitos que el otro, llenamos con ceros los lugares faltantes a la izquierda del numeral. Por ejemplo, asociemos los números 325 y 1246 con los vectores (0,3,2,5) y (1,2,4,6). Entonces 325 + 1246 puede asociarse a la suma:

(0,3,2,5) + (1,2,4,6) = (0+1,3+2,2+4,5+6) = (1,5,6,11) = (1,5,6,10+1) = (1,5,6+1,1) = (1,5,7,1)

En los pasos finales del proceso anterior aplicamos la fórmula fundamental [2], que se constituye en la base del manejo de los restos en los algoritmos tradicionales. Concluimos entonces que 325 + 1246 = 1571.

El proceso anterior está soportado también en la representación polinómica de los números dados.

$325 + 1246 = (3x^2+2x+5) + (1x^3+2x^2+4x +6) = x^3+5x^2+6x +11 = x^3+5x^2+6x +10 +1 = x^3+5x^2+6x+x +1 = x^3+5x^2+7x+1$.

Este último polinomio está asociado al número 1571.

A lo largo de los ejemplos vistos hemos mostrado algún rigor lógico paso a paso para esbozar un tipo de prueba útil como pie de apoyo a un programa de computación para las operaciones básicas. Algunos pasos, desde luego, pueden omitirse para ahorrar espacio y tiempo. Es el caso de la suma 325 + 1246, puede simplificarse como:

$$(1,2,4,6) + (0,3,2,5) = (1,5,6,11) = (1,5,7,1).$$

O tomando los residuos mentalmente en la forma 325 + 1246 = 1571.

Cambiando Numerales por Vectores. Los llamados aquí “vectores”, adjuntos a nuestra fórmula sintáctica [2], tienen la propiedad que la *n*-ésima coordenada tiene un valor diez veces mayor que la coordenada en el orden (n – 1). Pero nuestros vectores son diferentes de los clásicos, no obstante las operaciones y propiedades aparezcan similares.

La propiedad [2] nos da la posibilidad de transformar naturalmente, un numeral en un vector. El procedimiento es como sigue: 1) Empezamos con el numeral (una cadena de dígitos) como un vector unidimensional y luego separamos el dígito de las unidades para hallar un vector bidimensional. Seguidamente separamos la cifra o el dígito de las decenas para encontrar un vector en tres dimensiones, con las decenas y unidades separadas a la derecha. Continuando este proceso se tiene la cadena de igualdades:

$(a_na_{n-1}\ldots a_1a_0) = (a_na_{n-1}\ldots a_1\,,a_0) = (a_na_{n-1}\ldots\,,a_1\,,a_0) = \ldots = (a_na_{n-1},\ldots,a_1\,,a_0) = (a_n\,,\,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0)$

Todo el proceso se reduce a introducir comas entre los dígitos. Veamos cómo funciona el proceso en el caso del numeral 3678.

$$3678 = (3678) = (367,8) = (36,7,8) = (3,6,7,8)$$

El aspecto importante aquí es que la secuencia de igualdades, nos da la posibilidad de representar el el número 3678 en formas diferentes como suma de múltiplos de potencias de diez, es decir:

$$3678 = 367\times10 +8 = 36\times10^2 + 7\times10 + 8 = 3\times10^3 + 6\times10^2 + 7\times10 + 8.$$

En forma similar podemos reversar el proceso de derecha a izquierda. Esta acción da un significado razonable al manejo de los residuos y de la acción de llevar decenas, centenas, etc.

Ejemplo. Usemos notación vectorial para sumar 9993 con 7. Lo primero que debe hacerse es situar a los dos numerales en la misma dimensión, o sea (9,9,9,3) y (0,0,0,7). Seguidamente procedemos con la suma:

$(9,9,9,3) + (0,0,0,7) = (9+0,9+0,9+0,3+7) = (9,9,9,10) = (9,9,9+1,0) = (9,9,10,0) = (9,10,0,0) = (10,0,0,0) = (1,0,0,0,0)$.

Así concluimos que 9993 + 7 = 10000.

Multiplicación por escalar.

El conjunto ortogonal mostrado en [4] nos da la posibilidad de introducir otro tipo de producto llamado multiplicación por escalar, donde un número multiplicado por un vector nos da otro vector, donde todas las componentes o coordenadas del vector quedan multiplicadas por ese número. El signo para esta multiplicación es "·". Si k es un número y $(a_n\,,\,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0)$ es un vector, definimos este producto como:

$$k\cdot(a_n\,,\,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0) = (k\times a_n\,,\,k\times a_{n-1},\ldots,\,k\times a_1,\,k\times a_0). \qquad [\mathbf{5}]$$

En particular, cuando k es un dígito en {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} y "×" es el signo para la multiplicación entre dígitos, encontramos una forma fácil de multiplicar un número de una cifra por otro número arbitrario. Tomemos por ejemplo, $k = 7$ y el número 348. El producto de estos números es:

$7\times348 = 7\cdot(3,4,8) = (21,28,56) = (21,28+5,6) = (21,33,6) = (21+3,3,6) = (24,3,6) = (2,4,3,6) =2436$.

Este procedimiento puede parecer extraño pero es una forma razonada de explicar porqué 7×348 = 2436, sin salirse de contexto, empezando con los factores como *input* y seguir derecho al producto como *output.*

A lo largo de este artículo hemos mencionado tres tipos de multiplicación. Pienso que en la escuela elemental podríamos enseñar estos tres tipos, empezando por el producto interno, seguido por el producto por escalar para terminar con la multiplicación común y corriente, aquella que se ha venido enseñando en la misma forma por siglos. En otro artículo[2] he explicado el uso de vectores y polinomios en el proceso de enseñar los algoritmos de la multiplicación y el proceso de hallar los factores de un número compuesto.

En la misma forma en que podemos introducir un factor dentro de un vector, podemos reversar el proceso siempre que en las componentes del vector haya un factor común. Como un ejemplo de este caso, podríamos extraer las potencias de diez fuera del paréntesis en el conjunto ortogonal [4] y lograr algo como:

$10^n \cdot (1 , \dots , 0 , 0), \quad 10^{n-1} \cdot (0 , 1, \dots , 0 , 0) , \dots , \; 10^1 \cdot (0, 0, \dots ,1 , 0)$, and, $10^0 \cdot (0 , 0 , \dots , 0 ,1)$.

El conjunto de vectores que aparece arriba, con coordenadas nulas salvo una con valor unitario, se conoce como conjunto ortonormal, esto es, un conjunto ortogonal donde cada vector es de longitud uno.

Conclusión. A lo largo de esta nota hemos presentado algunas formas diferentes de ver y de estudiar los números y los algoritmos para la suma y el producto. Creemos que a través de esta metodología, la aritmética elemental puede ser conectada a las matemáticas avanzadas en una forma razonable y sistemática.

Primera versión en español, Armenia, Enero de 2015.

[2] Pareja-Heredia, D. *Beginning Abstract Algebra at Elementary Schoo1*, en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/Beginning_Abstract_Algebra_at_Elementary_School.pdf