Del Bit a las Wavelets
Hacia un radical cambio en la Enseñanza de las Matemáticas

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío*

"Entender el funcionamiento del iPod en términos del ábaco, es como basar nuestro sistema educativo en lo que la gente hacía y conocía, 8000 años antes de Cristo". K. Devlin

El tiempo óptimo para sembrar un árbol fue hace veinte años. La segunda mejor opción es hoy. Antiguo proverbio chino

2000 Mathematics Subject Classification 97D20.

Resumen: Los cambios tecnológicos de los últimos cincuenta años han precipitado un desequilibrio en varios aspectos relacionados con lo que se enseña, y lo que está en el frente de la investigación. Este desequilibrio es más notorio en las matemáticas que en otras áreas del conocimiento. En esta exposición se hará un análisis de nuevas alternativas tendientes a remediar la carencia de conexiones entre lo que se enseña y las aplicaciones de las matemáticas a las nuevas tecnologías. Se tratará de señalar algunas pautas para cerrar la brecha entre las matemáticas básicas y las matemáticas avanzadas en las que se soporta la tecnología del teléfono celular, la grabación digital, el *ipod* y toda la gama de nuevos instrumentos electrónicos que hoy consideramos como verdaderas maravillas.

Abstract: Technological changes in the past half century have originated a great unbalance at several aspects of the relation between that we teach and the research frontiers. This unbalance is more visible in mathematics than in any other scientific field. Through this paper we expect to analyze new alternatives conducting to remediate the lack of links between what we teach, and the math applications to new technologies. We propose some guidelines to abridge the gap between the basic math we teach and more advanced mathematics on which new technologies are founded, technologies, for instance, sustaining cellular phones, digital recording, *iPods*, and all of the electronic gadgets, we consider as true marvels.

Introducción.

En la década de 1970, cuando el microprocesador llegaba a conformar el núcleo central de los computadores se empezó a especular en torno a la revolución informática que se cernía sobre la humanidad. Fueron los años de las profecías de Alvin Toffler, de las fuertes críticas a la educación matemática, originadas en influyentes sectores de la academia en Estados Unidos, particularmente en boca del matemático Morris Kline de la Universidad de Nueva York. Fue además esta época en que la revolución femenina tomó un cariz interesante cuando la mujer rompió patrones sociales atávicos, a tal punto de crear una modalidad interracial de matrimonio de blancas con negros, como no se había visto antes. Consecuencia de esta revolución es el estado actual de la nación norteamericana, donde el presidente mismo, Barack H. Obama, es un hombre de color resultado de estos matrimonios interraciales, y donde, hasta ahora, los derechos civiles, reclamados con tanta vehemencia por Martin Luther King, empiezan a hacerse realidad.

Hoy, todos reconocemos que estamos en la cresta de la ola que cambió nuestra forma de vivir y de pensar: esa ola es la revolución informática, donde el celular, el ipod, la Internet y el computador son ya, elementos de uso corriente. No hay prácticamente nada, en donde, el toque mágico del microchip no haya hecho su presencia; desde la comunicación digital hasta la forma de enseñar y de aprender. Estos cambios se sienten a todos los niveles de la sociedad y obligan a replantear, el **qué** y el **porqué**, estamos transmitiendo conocimiento matemático a las nuevas generaciones; estas si, ya inmersas (incluso, antes que nosotros) en el seno de esta revolución. La enseñanza de las matemáticas es particularmente sensible a estos cambios, por cuanto el núcleo central de las nuevas tecnologías, tiene en las matemáticas a uno de sus grandes soportes.

Por ser las matemáticas una herramienta fundamental en el desarrollo de la tecnología, es necesario que sus contenidos y su enseñanza estén a tono con lo que está ocurriendo y con lo que está por venir en el comportamiento de las sociedades humanas como consecuencia de estos grandes cambios. Como dice el epígrafe de esta nota, es imposible entender las nuevas tecnologías con las incipientes matemáticas de culturas pasadas: tenemos que poner al día los contenidos y los enfoques de las matemáticas para mostrar a nuestros estudiantes que lo que en matemáticas enseñamos sí va ayudar a entender y en consecuencia a transformar el mundo de hoy. Sólo con las matemáticas de los antiguos griegos, la aritmética de los árabes de la edad media o con el cálculo de Newton y Leibniz del siglo XVII, no podemos explicar el desarrollo del mundo contemporáneo.

Todos los que tenemos que ver con educación deberíamos detenernos a pensar en el atraso en que está la enseñanza de las matemáticas (también de las ciencias) si se tiene en cuenta que las matemáticas se enseñan como si los grandes matemáticos de los siglos XVIII, XIX y XX nunca hubieran existido y como si las matemáticas se hubieran congelado al llegar a la edad moderna. Enseñamos matemáticas sin conocer los aportes matemáticos de Gauss, Fourier, Riemann, Weierstrass, Hilbert, etc. Y más grave aún, los profesores de matemáticas desconocemos las matemáticas que se generan en nuestros días, ni siquiera los nombres de los medallistas Fields que expanden las fronteras del conocimiento matemático en el mundo de hoy. Este estado de cosas contrasta con lo que ocurre en literatura donde la gente culta lee y se interesa por lo último que publican los premios Nobel. ¡Cómo imaginar la literatura colombiana sin García Márquez o la literatura latinoamericana sin tener en cuenta a Mario Benedetti, por ejemplo!

La educación matemática es un complejo entramado de conocimientos, destrezas, habilidades e inquietudes que hay que empezar a cultivar desde la más tierna infancia si aspiramos a que las generaciones que nos sucedan, no sean inferiores a los retos que demandará la asimilación de las tecnologías por venir. De aquí que sea muy importante fijarnos en las matemáticas que enseñamos en los niveles preescolar, básico y medio. A lo largo de este trabajo quiero mostrar algunas alternativas orientadas a que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas coadyuven a crear criterio matemático y a entender el porqué, las matemáticas son el soporte de las nuevas tecnologías. El criterio matemático es lo que permite la toma de decisiones acertadas en el curso de la vida. Por ejemplo una persona con buen criterio matemático nunca habría arriesgado su plata en una pirámide.

Lo que pretendo con esta propuesta de enseñanza de temas novedosos, es preparar el camino para llegar en forma ágil y coherente, desde las matemáticas elementales del **0** y del **1**, hasta las matemáticas involucradas en las *wavelets* sobre las que se soportan las nuevas tecnologías, entre ellas, la de la grabación digital, la transmisión de la información y el reconocimiento de patrones.

Empezando con el Árbol Binario.

La razón del nombre *computador digital* radica en que, a diferencia de otros computadores, el que usamos hoy, recurre en su parte operativa interna, a los dígitos 0 y 1. El término *Bit*, lo acuñó el matemático Claude Shannon[1] como una síncopa de las palabras *binary* y *digit*, para significar la capacidad de memoria necesaria para almacenar un dígito binario, esto es, la unidad de memoria requerida para guardar uno de los dígitos, 0 ó 1. Los computadores son en cierto aspecto máquinas de Turing[2] sofisticadas y de amplio espectro computacional, que va desde el procesamiento de texto hasta la realización de operaciones matemáticas de alto nivel.

Bueno es reflexionar sobre las razones que sustentan la estandarización del sistema decimal como el único que se enseña y practica en la sociedad moderna en casi todas las culturas. En otro artículo[3] explico estas razones, algunas muy obvias, al asociarlas al hecho de que el hombre tiene diez dedos y así es más cercano recurrir a una unidad decimal para medir, que a un patrón diferente. Sin embargo, desde el punto de vista evolucionista de la mente humana, no hay ningún argumento que sustente como acertada la elección del número diez como una base para un sistema numérico universal. La tendencia moderna[4], basada en evidencia arqueológica, experimental y teórica es aceptar que el hombre tiene codificado en sus redes neuronales, un gen matemático, que nos permite tener, desde la infancia, una apreciación del concepto de número. Sin embargo, no hay evidencia, histórica o de otro tipo, que demuestre que este gen tenga inclinación hacia un sistema numérico específico. Esto se aprecia al estudiar la historia de las matemáticas y observar que los sistemas más antiguos de numeración no son precisamente decimales. Por ejemplo, el sistema babilonio usado en la astronomía hace cuatro mil años fue sexagesimal[5]; el sistema de numeración usado en los calendarios elaborados por la cultura maya de los primeros siglos de la era cristiana, era básicamente vigesimal o de base veinte. Los sistemas de pesos y medidas alrededor del mundo no son tampoco uniformes, por ejemplo aun contamos por docenas, medimos con yardas, con millas y hablamos de acres o fanegadas para medir terrenos. Estos ejemplos muestran que los sistemas de numeración pueden cambiar, aunque los números como tales no. El número cinco es el número cinco, independientemente de cómo se lo represente, o del sistema de numeración que se emplee en su representación.

En el artículo citado, he hecho una descripción histórica del sistema binario y de sus alcances en las matemáticas. Aquí me propongo mostrar cómo, partiendo del sistema binario podemos llegar a entender como funciona la tecnología de nuestro tiempo y cómo desde allí es posible vertebrar muchas áreas de las matemáticas avanzadas, hoy ignoradas en el estudio de las matemáticas básicas. Empecemos por decir que teniendo los números naturales codificados en base dos, podemos expresar los números racionales positivos, primero, y luego, todos los números reales con cualquier grado de aproximación. Al usar el árbol binario completo (Fig.

---

[1] Ver mi artículo: *Del Bit a la Revolución Informática en:* http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/Shannon.pdf

[2] Las máquinas universales de Turing se han venido simplificando hasta la más reciente, la Wolfram 2,3 que opera con dos estados y tres símbolos. Ver la página de Wolfram en: "*En el Ángulo de Devlin*" de Mayo de 2009, http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/

[3] El sistema binario se describe en mi artículo *El Poder del Dos* que aparece en la página Web mencionada arriba.

[4] Esa es la tesis sustentada por Keith Devlin en: *The Math Gene. How Mathematical thinking evolved and why Numbers are like Gossip.* Basic Books. Great Britain. 2000.

[5] Aun nos queda la medición angular de base sesenta, y la medición del tiempo en minutos y segundos heredadas de aquella antigua cultura.

3), en los nodos de la derecha van a aparecer los números naturales y en los nodos de la izquierda en forma discreta estarán las fracciones comprendidas entre **0** y **1**. Una construcción detallada de los números reales se verá más adelante.

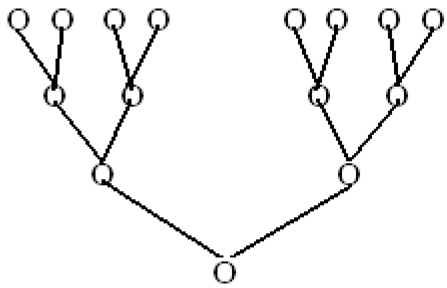

Fig. 1. Un árbol binario con bolitas y palitos. En la rama de la derecha construiremos los naturales y en la rama de la izquierda las fracciones racionales que están en [0, 1]. También con bolitas y palitos podrá el niño hacer todas las letras minúsculas del alfabeto.

Dos mundos: el del Sujeto y aquel del Objeto.

Poco o nada es lo que sabemos sobre la forma en que el niño en sus primeros años aprende y se ambienta en su mundo restringido, en espacio, tiempo y circunstancia. La psicología experimental de Piaget trataba en cierto aspecto, simular el comportamiento del niño en sus primeros años y según esto buscaba el camino más apropiado para la enseñanza. El primer aspecto que quisiera tocar aquí es el relacionado con el choque entre lo que el niño ve y lo que nosotros como sus guías o maestros tratamos de enseñarle. En lo espacial digamos, asociado a lo visual, se presenta el primer gran problema de comprensión: lo que para nosotros en nuestro mundo es derecha, para el niño en su pequeño mundo, es izquierda y lo que es izquierda para nosotros es derecha para él. En lo dinámico ocurre otro tanto; lo que para nosotros es para delante, en el mundo del niño es para atrás y viceversa, lo que para nosotros es para atrás para él es hacia adelante. Ésta, llamémosla, disimetría se viene a complicar aun más cuando descubre que su imagen especular (al mirarse en el espejo), no sigue el mismo patrón; la imagen de su mano derecha en un espejo está a la derecha de el y no a la izquierda como debería estar si se tratara de otra personita que habita al otro lado del espejo. Deberá pasar por muchas vivencias para que su cerebro se acomode al manejo de las complejidades que se derivan de estas disimetrías. Aun en la edad adulta no llegamos a comprender la razón de la extraña imagen que refleja el espejo. Este fenómeno de la imagen especular dio a Lewis Carroll suficiente motivación para escribir ese clásico de la literatura infantil: *Alicia a través del espejo*.[6]

Olvidemos por ahora la imagen especular y concentrémonos en el mundo del niño. El nos va a ver en otra dimensión con movimientos de sentido opuesto a los suyos. Por ejemplo cuando digo a un niño: "señale a la derecha", para que el me comprenda, yo señalo a mi izquierda; lo que no ocurre cuando le indico que señale hacia arriba, yo le indico hacia arriba y el muestra hacia arriba. Queda flotando en el ambiente el porqué, para ciertas direcciones el sentido se cambia, mientras que para otras no. Estos que parecen problemas triviales, tienen gran profundidad y por su complejidad muy pocos autores llegan a tratarlos en extenso. Sin embargo para la teoría del aprendizaje estos temas son centrales para entender la dimensión

[6] Carroll, L. *Alicia a través del Espejo*. Alianza Editorial. Madrid. 1970

de lo complejo que es enseñar al niño que aun por su desarrollo cerebral no ha llegado a establecer los mecanismos psíquicos que le permitan hacer la conversión del mundo del objeto a su propio sujeto (perdón la redundancia).

Cuando intentamos enseñar a un niño de dos años a leer o escribir nos encontramos con el problema que el niño a esa edad no tiene aun la comprensión de la dirección, ni el sentido en que se lee o se escribe. Esta comprensión no viene con el niño en su código genético y debe aprenderla, de allí la importancia en recavar sobre este aspecto desde los primeros años para que el acceso a este mecanismo aprendido le facilite luego, tanto la lectura como la escritura. La dirección horizontal (izquierda-derecha o derecha-izquierda) enfrente al niño: hay que enseñársela. El sentido en esa horizontal, también hay que enseñarla, por ejemplo hay que familiarizarlo con la forma de escribir: de izquierda a derecha en su mundo o de derecha a izquierda en el mundo del papel.

Las dificultades expuestas arriba no son fáciles de superar en la enseñanza de infantes. Sin embargo si logramos encontrar para el niño un "émulo" que siga el mismo patrón que él en sus movimientos, quizá podamos acelerar el proceso de aprendizaje, no únicamente de la lectura y escritura, si no, aun más importante, la comprensión de las matemáticas, que siempre han sido consideradas el "coco" del aprendizaje. Este émulo debe ser un habitante de su propio mundo, que responda a sus estímulos y que esté sujeto al manejo y voluntad del infante. Hay que adornarlo además de encanto suficiente para que cautive y capture su imaginación, así como lo hacen con tanto acierto, los backyardigans, Barney y sus amigos y demás héroes infantiles de Discovery Kids. Tantas cualidades para un émulo de un niño en su mundo parece imposible de lograr. Antes de proponer un candidato para este desempeño, digamos algo sobre el sentido del tacto, tan útil e imprescindible en la ambientación del infante al mundo que lo rodea.

Todos conocemos casos extremos de superación frente a las limitaciones impuestas por la ausencia, de uno o varios de nuestros sentidos. Hay ciegos que se desempeñan autónomamente o con pequeñas ayudas; sordomudos que viven una vida casi normal. Hay personas, que por determinadas circunstancias pierden el sentido del olfato o del gusto y aun así, siguen una vida normal. Sin embargo, no podríamos imaginar a un ser humano (ni siquiera a un ser vivo) que sobreviva con la carencia absoluta del sentido del tacto. Hay que entender que el sentido del tacto no es solamente los reflejos táctiles emanados de nuestras manos. El sentido del tacto es inherente a la piel, el órgano mayor del ser humano en donde la infinidad de terminales nerviosas nos mantienen informados del mundo inmediato que nos rodea, desde la temperatura del medio ambiente hasta la forma de los objetos a nuestro alrededor, pasando por las sensaciones hostiles a nuestro cuerpo, como lo punzante o lo áspero hasta aquellas placenteras de las caricias y cuando adultos las sensaciones eróticas, indispensables para la preservación de la especie. El mismo proceso de succión en el bebé está ligado al tacto. Con esto estamos afirmando que el sentido del tacto es imprescindible para la supervivencia del ser humano y en general para la totalidad de los seres vivos.

En la enseñanza infantil, a lo largo de los siglos, se ha tenido a la mano del niño como el instrumento de escritura y se le ha negado, salvo históricas excepciones, el gran potencial que tiene para la creatividad y para ser un vehículo fantástico de aprendizaje de mucho más que la escritura. Creo que hemos desperdiciado el uso de los dedos como factor de desarrollo mental y motriz, y de comprensión del mundo que nos rodea, amén de la creación en el plano artístico, como la música o la pintura. Y más aun, las manos del niño pueden constituirse en motores de creación de fantasías y de mundos imaginarios, a los que la mente infantil es muy proclive. Esos mundos imaginarios generalmente son los que motivan e inducen en la edad adulta a tomar la decisión de escoger entre los diferentes campos de acción a los que nos dedicaremos a lo largo de nuestras vidas. Con estas consideraciones en mente ya podremos pensar que él émulo al que nos referíamos arriba, hay que buscarlo con el recurso de los dedos de las manos del niño.

***Fig.* 2**. Primera versión de “Payi”, el payasito formado por la mano del niño que sirvió de modelo para la enseñanza del sistema binario. El payasito representa los opuestos y a través de ellos se ayuda a la enseñanza de conceptos como dirección, sentido y orientación.

Aparición en escena de “Payi”

El payasito “Payi” (*Fig.* 2) apareció por primera vez, en una presentación que el autor hizo a estudiantes de tercer grado elemental con el objeto de introducir el sistema binario. La presentación se basaba en la fantasía de un personaje extra terrestre procedente de un mundo conocido como NUMBER PLANET, donde sus habitantes se dedican al juego y a aprender de todo con recursos lúdicos. Una diferencia con los niños de la tierra es que los habitantes de este fantástico mundo no tienen dedos. Tienen sólo dos bracitos y es con este recurso como ellos aprenden a contar y a realizar las operaciones aritméticas. Con sus piecitos además, dan la orientación a sus movimientos, adelante, atrás, derecha o izquierda. Para un detallado recuento del sistema puede verse mis exposiciones en la página Web: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

El payasito Payi es un personaje encarnado en la mano derecha (o la izquierda) del niño utilizando un guante blanco con la carita de un payaso. Los pies están representados por los dedos del centro y el índice y los brazos por el pulgar y el meñique. El dedo anular se oculta en la parte posterior de la mano para simular en el niño el payasito Payi. En principio, Payi es la figura que se acomoda a los requerimientos propuestos como émulo para el aprendizaje de conceptos como dirección y sentido y por supuesto, la introducción de los opuestos a través de los cuales aparecerá una gran variedad de conceptos matemáticos útiles para la adecuación del niño a su mundo como se verá más adelante. ¿Por qué Payi se puede convertir en el émulo del niño para asimilar conceptos de dirección y sentido? Primero por el atractivo propio del payasito como tal, y en segundo lugar porque Payi es también un habitante del mundo del niño, en donde derecha e izquierda coinciden con la concepción intuitiva que de ello tiene el niño a su corta edad.

La experiencia muestra al tutor que, el niño en sus comienzos confunde las letras. Por ejemplo, la p y la q, la b y la d por cuanto aun su mente no ha logrado fijar el concepto de derecha e izquierda. Puede notarse en la práctica que esta confusión no se da por ejemplo entre la q y la d que tiene la primera la barriga arriba y la segunda la barriga abajo, por cuanto esta distinción la hace tanto el profesor como el niño. Bien sabido también es el hecho que las letras de molde minúsculas[7] se hacen prácticamente con dos elementos primarios: la bolita (**O**) y el palito (**|**). Desde que el niño llega a preescolar lo deberíamos familiarizar con estos dos elementos primarios. Aquí llamaremos: lo *continuo*[8] (**O**) y lo *discreto* (**|**). Con esto estamos introduciendo al niño al mundo de las matemáticas (avanzadas) sin temor a causarles pánico, pues ellos como su experiencia lo indica, dibujan la bolita una y otra vez sin necesidad de levantar el lápiz y sin cambiar de sentido, mientras que para dibujar el palito (lo discreto) debe levantar el lápiz o cambiar de sentido si desea repisar lo escrito. Esto parece una nimiedad, pero en el fondo se esconde matemáticas de alto nivel como es topología algebraica y teoría de grafos.

Lo que buscamos a través de este enfoque de enseñanza, es ir familiarizando al niño con los temas que tratarán las matemáticas avanzadas de una parte, y de otra y muy importante, las aplicaciones que estas mismas tienen en su pequeño mundo. En este caso los conceptos de dirección, sentido y posición del todo con relación a sus partes. Cuando tenemos la barra o el palito y la bolita o circunferencia juntos como objetos, puede aparecer la primera con respecto al palito: arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda, generando una gama de posibilidades que va a permitir identificar las letras **p**, **q**, **b** y **d**. Aquí se destaca ya una aplicación de las matemáticas a su pequeño mundo como es, aprender a identificar la posición de los símbolos primarios de uno con respecto al otro y de allí, la asociación de los símbolos a las letras del alfabeto.

Decíamos arriba que, con estos elementos primarios se elaboran todas las letras. Sin embargo preguntarán ustedes, ¿de donde van a salir letras como la **s**, la **m,** o la **n**? Es muy fácil hacerle comprender al niño a través de la experimentación que así como es posible alargar, doblar, recortar los palitos, también será posible hacer lo mismo con las bolitas. Así por ejemplo, si recortamos la bolita en forma horizontal va a aparecer, abajo la **u** y arriba la **n**. También si cortamos la bolita solamente abajo y abrimos la curva bajando simultáneamente su punto central encontramos la **m**. La **s** se obtiene cortando la bolita verticalmente y dejando caer la parte derecha hasta que los extremos se junten. La **c** es la mitad de la bolita al borrar su parte derecha. Así mismo por repetición o dobleces de bolitas o palitos se encuentran las demás letras. En conclusión para aprender las letras sólo se necesita los elementos primarios. También con la ayuda de Payi se puede llegar a comprender los conceptos de orientación, dirección y sentido.

---

[7] Las letras minúsculas entraron a las lenguas romances bien entrada la edad media. Los romanos por ejemplo, no tenían dos alfabetos. La inclusión del alfabeto de minúsculas se atribuye a Alcuino un monje inglés del siglo VIII que contribuyó con mucho a la educación dentro de la corte de Carlomagno.

[8] Aquí estamos ya conectados con matemáticas avanzadas y con temas controversiales de las matemáticas modernas: *El problema del Continuo.* Ver mi artículo *Breve historia de la Hipótesis del Continuo* en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

¿Pero qué es orientación? Otra de las grandes incógnitas para el niño es saber el sentido del movimiento. La apreciación del movimiento es algo inmanente en los seres vivos, pero a diferencia de los animales, los seres humanos reflexionamos sobre él, y nos hacemos preguntas de gran profundidad como las involucradas en las paradojas de Zenón[9] que nos tienen pensando desde hace casi dos mil quinientos años. Aquí llegamos a otro punto de mucho interés en la enseñanza de infantes como es la comprensión de la forma en que podemos recorrer la circunferencia (o la bolita). Los niños pequeños pueden hacer bolitas o circunferencias sin mayor esfuerzo, siguiendo un patrón no fácil de explicar en cuanto a su escogencia: ya sea siguiendo el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario. Este pequeño detalle conlleva, al igual que lo dicho con las formas de las letras, otro contenido matemático muy profundo. Sólo hasta el siglo XIX estos aspectos de la orientación de una curva se vinieron a aclarar con los trabajos de Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Aquí hay topología algebraica y geometría diferencial de alto nivel que normalmente, el profesor de matemáticas en la escuela desconoce. Para el caso de la circunferencia; si al recorrerla tenemos a la derecha su interior diremos que el movimiento va en el sentido de las manecillas del reloj. Al contrario, si la recorremos teniendo el exterior a la derecha es porque nos estamos moviendo en sentido contrario a las manecillas del reloj. Y claro aquí de nuevo aparecen los conceptos de derecha e izquierda, interior y exterior, conceptos que Payi buscaba hacer comprender a los niños a través de sus lecciones sobre los opuestos.

Al encanto de la figura de Payi se suma su movilidad y sus travesuras propias. A veces bailando, saltando o haciendo preguntas que los niños son felices al responder. Por encima de eso, Payi es un habitante del mundo personal del niño, para quien derecha e izquierda significa lo mismo que para él. Lo que buscábamos al diseñar a Payi era engendrar un contertulio que se portara como él y que le permitiera activar los movimientos de sus deditos y desarrollar su imaginación y fantasía con toda libertad. En efecto; el payasito hará las veces de un príncipe, o si se quiere en compañía de su mano izquierda disfrazada (yo la llamo "Paya"), permite hacer papeles más complejos como los de un príncipe y una princesa, un rey y una reina, el papá y la mamá, la hermana y el hermano, etc. Esto apenas, es el comienzo de toda una aventura que el niño en sus primeros años puede vivir, dejando recuerdos agradables al permitir una dimensión distinta del juego donde el infante aprende a asumir distintos roles que van a facilitar la adquisición de lo que hoy se llama, *Teoría de la Mente* (theory of mind, en inglés) y que en otro artículo doy el nombre de *transfiguración.* [10]

Esta idea de poner al niño a asumir roles distintos al de si mismo, se ha convertido en tema de mucha investigación alrededor del mundo, por cuanto que, hay una relación estrecha entre la teoría de la mente y el lenguaje, de una parte, y de otra, entre el lenguaje y los mecanismos que rigen el aprendizaje en edad temprana y las consecuencias que un mal aprendizaje puede acarrear para el adulto. Una de las cosas que el niño autista no puede asumir, por ejemplo, es precisamente el rol del otro y es por eso que para este niño se hace tan difícil correlacionarse con sus compañeros. Aun no está claro si una educación temprana con alto contenido de estimulación hacia la teoría de la mente – antes de los tres años cuando se cree que empiezan a manifestarse los síntomas del autismo – podría prevenir, o menguar las secuelas de esta afección sicológica, hoy presente en tantas partes del mundo.

[9] Ver mis notas de Epistemología de las matemáticas en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info
[10] Ver mi artículo y las referencias citadas en: *Las Experiencias de* "*Payi*" en la página citada arriba.

El mundo de lo continuo y lo discreto

La filosofía en general, y la filosofía de las matemáticas en particular, tienen entre sus grandes problemas el *problema del continuo*. El continuo como concepto filosófico tiene sus raíces en la Grecia de los Presocráticos, cuando tanto Heráclito como Parménides se enfrascaron, cada uno por su lado, en la discusión de la continuidad del movimiento y del tiempo. Aquí vamos a entender lo continuo y lo discreto en el mismo sentido en que entendemos derecha e izquierda, arriba y abajo y en general como se entienden todos los opuestos: ninguno de los opuestos se puede entender sin su contraparte. Como no tratamos, ni trataremos aquí de definir conceptos en este nivel de aprendizaje, nos veremos restringidos a la comprensión intuitiva de estos conceptos. Así que la noción de continuidad a este nivel será la que se deriva de la traza que deja el movimiento, como por ejemplo, en la circunferencia que permanece al dibujar la **O**. La circunferencia seguirá asociada a lo continuo y va a conducir más adelante hacia la geometría de Riemann, la verdadera geometría de nuestro mundo real, que se estudiará en el bachillerato. La geometría euclidiana se estudiaría como una aproximación local de la geometría de Riemann.

Una de las grandes discusiones filosóficas el siglo pasado entre intuicionistas y formalistas fue la constitución del continuo. Para los intuicionistas el continuo no tiene partes como dice L. E. J. Brouwer:

> "El continuo lineal no se puede agotar por interpolación de nuevas unidades y por tanto nunca puede pensarse como mera colección de unidades."

Y más recientemente René Thom afirmaba, "Un verdadero continuo no tiene puntos." El punto de vista de Hilbert y así, en términos generales el enfoque de los formalistas es que la recta se puede identificar con el conjunto de los números reales y en esta identificación se basa la mayor parte de las matemáticas que se desarrollaron en el siglo XX.

Muchas de las formas de aproximarnos a los números han sido tomadas de la tradición. El enfoque generalizado de empezar con los números naturales, luego los enteros, los racionales y pasar a los reales que llamaré aquí el enfoque Kronecker[11], es en cierto sentido el enfoque histórico que culminó con los trabajos de Dedekind a fines del siglo XIX. Eso no quiere decir que sea la única forma de enseñar matemáticas. Se puede empezar directamente con los números reales y hacer aritmética, álgebra y cálculo en este conjunto; a este enfoque se conoce como enfoque Davidov[12]. En este artículo no entraremos en detalle sobre estos tópicos, pero desde ya queda la inquietud de trabajar este tema en otra oportunidad.

El Árbol binario y sus dos ramificaciones

Mencionamos que Payi introdujo el árbol binario con raíz en 1 para crear los enteros positivos como los nodos en ese árbol. Dicho de paso, los árboles a los que nos referimos

---

[11] Leopold Kronecker (1823-1891), matemático alemán a quien debemos la frase "Dios hizo los naturales todo lo demás es obra del hombre"

[12] Ver la columna de Devlin de enero de 2009, traducida en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

aquí también están constituidos por la bolita (**O**) y el palito (|) de los que hablamos antes; aquí las bolitas son los nodos y los palitos las ramas o aristas del grafo resultante.

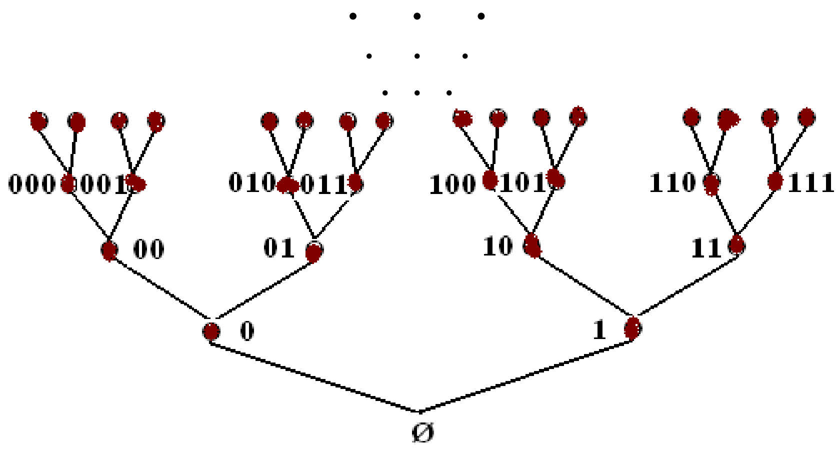

Fig. 3. El árbol binario con sus dos vertientes: a la derecha los números naturales y a la izquierda las fracciones racionales en el intervalo [0, 1]. Con esas componentes se puede representar cualquier número real. Este árbol es un ejemplo de un Fractal sencillo, al alcance de un niño de escuela[13].

Numerando los nodos con **1** y **0** hallamos la representación binaria de los números naturales: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100,1101, 1110, 1111,.... Si el árbol se abre por encima de **0** tendremos la base para representar en forma binaria todas las fracciones entre **0** y **1**. El árbol binario completo se muestra en la gráfica (*Fig.* 3) con sus nodos y sus ramas y donde, los puntos suspensivos indican que el árbol crece indefinidamente. Esta figura tan sencilla y tan simple puede ser el primer ejemplo para mostrar a los niños de un fractal que ellos mismos pueden construir. Se puede observar y posiblemente los niños también notarán que el todo es similar a cada una de sus partes constitutivas.[14]

En el ramal de la izquierda aparecen 0, ½, ¼, 1/8, 1/16, 1/32, etc., las potencias de dos con exponente negativo y combinaciones de éstas, por ejemplo:

$$011 = \sum_{j=0}^{j=-2} a_j 2^j = a_0 \times 2^0 + a_{-1} \times 2^{-1} + a_{-2} \times 2^{-2},$$

Donde a_j toma los valores de 0 ó 1, en este caso, 0, 1, 1, respectivamente. Por lo tanto,

$$011 = 0.11 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 0 \times 1 + 1 \times 1/2 + 1 \times 1/4 = ½ + ¼ = ¾.$$

Donde el punto (.) en 0.11 representa el punto de fracción binaria y no hay que confundirlo con el punto decimal ya que aquí estamos usando sistema de base dos. En cada nivel en la izquierda del árbol aparecen las fracciones de dos empezando por 0. Por ejemplo en el tercer nivel hallaremos 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8 y en el cuarto nivel 0, 1/16, 2/16, 3/16, 4/16, 5/16, 6/16, 7/16/, 8/16, 9/16, 10/16, 11/16, 12/16, 13/16, 14/16, 15/16. Esto muestra que

---

[13] Los fractales introducidos por Mandelbrot presumen conocimientos de matemáticas avanzadas. Una definición intuitiva podría ser: un fractal es un objeto geométrico de intrincado detalle a escalas arbitriamente pequeñas y con cierta medida de auto-similitud. Desde el punto de vista matemático, un fractal es un espacio métrico con dimensión topológica estrictamente menor que su dimensión de Hausdorff. Por ejemplo el triángulo de Sierpinski es un fractal con dimensión topológica 1, pero su dimensión de Hausdorff es ln3/ln2. Ver: Previte, M. et al. *A Novel Way to Generate Fractals*. The American Mathematical Monthly. January 2008.

[14] Ver: Sibley, T. Q. *A Fractal is*. The Mathematical Intelligencer. Vol. 20, No. 2. Spring 1998. Pag. 22.

a medida que avanzamos hacia arriba la unidad se va dividiendo en fracciones cada vez más pequeñas. La intuición nos dice que no importa como sea un número entre 0 y 1, habrá una partición en el árbol binario de tal forma que el número coincide, o con uno de los puntos de la partición, o está entre dos de ellos, tan cercanos como se quiera; en este último caso diremos que estos números binarios aproximan por defecto o por exceso al número dado.

El árbol se cierra en su raíz con Ø para completarlo, haciendo que el conjunto vacío pertenezca al conjunto de los árboles binarios. Los árboles binarios son un recurso matemático con multitud de aplicaciones, tanto teóricas como prácticas. Un famoso resultado con muchas aplicaciones en la lógica moderna es el lema de König[15] que se prueba usando la teoría de árboles binarios. La teoría de tipos de Bertrand Russell tiene en su configuración un árbol binario, como lo tiene la jerarquía de los conjuntos construibles de Gödel. Las aplicaciones prácticas están en casi todas las áreas de las ciencias en particular en la ciencia de la computación teórica, donde un resultado en teoría de archivos lleva el nombre de archivo binario.

Resumiendo: en el árbol binario caen todos los números naturales y todos los números reales entre 0 y 1, dada la condición de aproximación mencionada arriba. Como consecuencia de la Propiedad Arquimediana[16], estamos en condiciones de afirmar que todo real positivo se puede expresar como suma de un natural más una fracción binaria. Esto es sumamente importante porque nos permite expresar a todo número real como un entero más una fracción en el intervalo [0 , 1], es decir como translaciones y expansiones: translaciones en el sentido de ubicar a los números reales, primero entre dos enteros consecutivos y luego sumar su expansión tomada del intervalo [0 , 1]. En general, todo real r (incluyendo reales negativos), tendrá esta forma, que simbólicamente se representa:

$$r = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} a_j 2^j .$$

Aquí $a_j \in \{0,1\}$ los dígitos del sistema binario, y j recorre los números enteros: …, - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…. Si r es negativo todos los a_j se toman negativos.

Los subíndices negativos permiten la inclusión de fracciones binarias, como por ejemplo, la fracción binaria: 0.111 = $1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}$ = 7/8, en donde $a_{-1} = 1$, $a_{-2} = 1$, $a_{-3} = 1$, y $a_j = 0$, en todos los otros casos.

[15] El lema de König afirma que si T es un árbol binario infinito, entonces T tiene una rama infinita. Esto intuitivamente significa que el árbol binario es infinito, no porque un nivel tenga infinitos elementos sino porque hay al menos un ramal infinito.

[16] La Propiedad Arquimediana afirma que dado un real $x>0$ y cualquier otro real y, existe un número natural $\boldsymbol{n}$ tal que $\boldsymbol{n}x > y$. Pueden existir muchos naturales que cumplan la propiedad, pero si $\boldsymbol{n}$ es el mínimo de todos, tendremos que $(\boldsymbol{n}\mathbf{-1})x < y < \boldsymbol{n}x$. Cuando x es una fracción binaria tenemos lo afirmado arriba que todo real y lo podemos aproximar por defecto o por exceso con dos números $(\boldsymbol{n}\mathbf{-1})\,x$, $\boldsymbol{n}x$ de la combinación del árbol binario. Aceptando el Axioma del Extremo Superior y será la mínima cota superior de los $\boldsymbol{n}x$ ó la máxima cota inferior de los $(\boldsymbol{n}\mathbf{-1})\,x$, cuando x se escoge en las fracciones del árbol binario.

Empezando en lo Lineal

Los polinomios tienen el atractivo de su simplicidad. Todo lo que aparece en ellos son sumas y productos. Sin embargo los matemáticos en su propósito de simplificar tanto la notación como las operaciones involucradas en los polinomios de una sola variable encontraron que éstos pueden representarse como productos de cosas más sencillas como son los vectores. Por ejemplo un polinomio como $x^2 - 5x + 6$ podría expresarse como el producto escalar de los vectores (1, -5, 6) y (x^2, x, x^0) donde el producto en este caso se define como la suma de los productos de las componentes en su orden, $1 \times x^2 + (-5) \times x + 6 \times x^0$. Este producto de vectores se denomina producto interno. Aquí el primer vector representa el vector de los coeficientes y el segundo representa el vector de las variables.

Si denotamos como $\mathbf{A} = (a_0, a_1, ..., a_n)$, al vector de los coeficientes, con $a_0 \neq 0$, y, $\mathbf{X} = (x^n, x^{n-1}, \dots, 1)$ el vector de las variables, el polinomio $P(x)$ de grado n puede representarse como

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = (a_0, a_1, ..., a_n)(x^n, x^{n-1}, \dots, 1) = \mathbf{AX}$$

Lo anterior significa que el polinomio P tiene una representación lineal, en el sentido de que se puede expresar como el producto de una constante (en este caso **A**) por una variable (**X**). Estas expresiones se llaman lineales porque cuando se representan en el plano, si **A** es un número real y **X** una variable, su gráfica es una línea recta que pasa por el origen. Este concepto de linealidad se puede extender a arreglos de vectores de la misma dimensión para crear las llamadas matrices, elementos básicos en el álgebra lineal.

El análisis anterior nos permite afirmar que todo número real corresponde al valor numérico de un polinomio cuando x se reemplaza por un número natural (la base de representación) distinto de cero y uno. Que esta representación sea única (salvo en expansiones infinitas) lo garantiza la linealidad de las bases en los espacios vectoriales. Por ejemplo, el número 5287 (representado en forma decimal) se puede escribir primero como un vector de cuatro componentes así: $(5, 2, 8, 7) \equiv 5287$ y luego como un polinomio para llegar a la combinación lineal en términos de los vectores unitarios (1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0) y (0, 0, 0, 1) que para el caso corresponde a lo que llamamos: unidades de mil, centenas, decenas y unidades. Más exactamente:

$$5287 = 5 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \equiv 5\,(10^3, 0, 0, 0) + 2\,(0, 10^2, 0, 0) + 8\,(0, 0, 10^1, 0) + 7(0, 0, 0, 10^0) \equiv 5(1, 0, 0, 0) + 2\,(0, 1, 0, 0) + 8\,(0, 0, 1, 0) + 7\,(0, 0, 0, 1).$$

Observe la aparición del signo "$\equiv$" para significar que hubo un cambio de estructura; primero hacia los polinomios y luego a los espacios euclídeos. La última expresión nos dice que el número 5287 se puede asociar a una representación lineal en términos de la base de un espacio vectorial y así su representación lineal es única.

Si nos restringimos a vectores de n componentes, digamos $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, estos se pueden representar como una suma de productos del tipo $x_i\, e_i$, $1 \leq i \leq n$, donde e_i es el vector unitario (0,…,1,...,0), cuyas entradas son cero, salvo en el lugar i-ésimo donde aparece un 1. Simbólicamente

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \ .$$

Los vectores e_i tienen la particularidad de ser ortogonales entre si y de tener longitud unitaria. El conjunto de vectores linealmente independientes $\{e_i\}$, se llama una base para el conjunto de vectores n-dimensionales. Una base entonces, es un conjunto de vectores ortogonales y unitarios que permite representar cualquier vector como combinación lineal de ellos, como se muestra arriba. Dos vectores se dicen ortogonales si su producto interno o escalar es cero.

A conceptos como espacios vectoriales, espacios métricos, espacios euclídeos, espacios de Banach, espacios de Hilbert y a otros similares en el espectro de las matemáticas de alto nivel, se puede llegar desde un punto de vista elemental como hemos mostrado en los párrafos anteriores.

Polinomios, series de Fourier, polinomios de Bernstein y movimiento browniano

A la representación de funciones continuas usando polinomios se llegó temprano en la historia del análisis matemático. Newton y Leibniz y luego los Bernoulli hicieron de los polinomios, expresamente los polinomios de Taylor, una herramienta para tratar distintas clases de funciones entre ellas las funciones trigonométricas, exponenciales, etc. Sin embargo, fue Joseph Fourier por primera vez quien usó funciones como seno y coseno para representar funciones más allá de las funciones continuas tratadas antes. Este fue un paso gigantesco si se tiene en cuenta que funciones como seno y coseno, son periódicas y con derivadas de todos los órdenes. Sin embargo cuando aparecen en las series de Fourier pueden generar funciones continuas que no son diferenciables en ninguna parte o que representan funciones no continuas como son las funciones escalonadas.

Después de alguna depuración, como las contribuciones hechas por Lejeune Dirichlet (1805-1859) y Karl Weierstrass (1815-1897), la teoría de las series de Fourier alzó vuelo y hoy por hoy es una herramienta fundamental en el tratamiento de ondas y en la transmisión de información de distinto tipo. La importancia de las series de Fourier radica en el hecho de que a partir de seno y coseno se pueden formar bases para representar linealmente una variedad más amplia de funciones que lo que puede hacerse con polinomios. Por ejemplo la siguiente función es continua para todo $x \in \mathbf{R}$ pero no es derivable en ninguna parte, su serie de Fourier es

$$f(x) = cos(\pi x) + ½\, cos(13 \pi x) + ¼\, cos(169 \pi x) + 1/8\, cos(2197) \pi x) + \ldots$$

Una identidad tan simple como $1 = [x + (1 - x)]$ podría interpretarse como que el todo (la unidad) es igual a una de sus parte (x) más la totalidad disminuida en la parte ya tomada. En filosofía (aristotélica) esto corresponde a que, el todo es la suma de sus partes. Cuando x es un elemento arbitrario en $[0 , 1]$, la fórmula anterior genera otra identidad menos obvia pero sumamente interesante:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Que se obtiene de la primera, elevando a la n-ésima potencia los dos miembros de la igualdad y usando la fórmula binomial para expandir $[x + (1- x)]^n$. Aquí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, son los coeficientes binomiales. La suma corresponde a la adición de $n+1$ polinomios $B_{n,k}(x)$, $0 \leq k \leq n$, todos ellos no negativos cuando x toma valores en [0 , 1]. Estos polinomios se conocen como polinomios de Bernstein. Los primeros polinomios de Bernstein son:

$$n = 0, \qquad B_{0,0}(x) = 1$$

$$n = 1, \qquad B_{1,0}(x) = 1 - x, \qquad B_{1,1} = x$$

$$n = 2,\ B_{2,0}(x) = (1-x)^2,\ \mathrm{B}_{2,1}(x) = 2x(1-x),\ B_{2,2}(x) = x^2$$

$$n = 3,\ B_{3,0}(x) = (1-x)^3,\ B_{3,1}(x) = 3x(1-x)^2,\ B_{3,2}(x) = 3x^2(1-x),\ B_{3,3}(x) = x^3.$$

. . .

Sergei N. Bernstein (1880-1968) [17], exhibió estos polinomios para probar empíricamente el teorema de Weierstrass de que toda función de valor real continua en [0, 1] puede aproximarse uniformemente por un polinomio[18].

Los polinomios de Bernstein asociados a una función continua f, son polinomios de la forma:

$$p_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Este polinomio usa valores discretos de f, calculados en la partición $\{0 = 0/n, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, n/n = 1\}$, del intervalo [0 , 1]. La sucesión $\{ p^f{}_n \}$ converge uniformemente a f en [0 , 1]. Los coeficientes binomiales tienen la interesante propiedad de que su suma en cada nivel n es 2^n. Simbólicamente

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}.$$

La última igualdad se origina en el desarrollo del binomio con $a = b = 1$.

El interés en los polinomios de Bernstein en matemáticas radica en el hecho que, a través de ellos se puede aproximar funciones continuas de distinto tipo, entre ellas algunas bien complicadas, como las funciones cuyas gráficas aparecen en el movimiento browniano, caracterizadas por no tener derivada en ningún punto, y otras funciones que no son fáciles de

[17] Sergei Bernstein hizo su doctorado en la Sorbona de París y estudió también en la Universidad de Gotinga a comienzos del siglo XX, para luego volver a su país de origen Rusia, donde debió hacer otro doctorado en la Universidad de Kharkov, porque para efectos laborales los títulos extranjeros no tenían validez en la Rusia de aquel tiempo. Bernstein pasó a la historia al resolver dos de los veintitrés problemas de Hilbert.

[18] El teorema de Weierstrass se enuncia así: sea f una función de valor real definida y continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces existe una sucesión de polinomios de valor real, $p_1, p_2, \ldots$ que converge uniformemente a f. Este teorema fue generalizado por Marshall Stone para álgebras de funciones continuas de valor real definidas en espacios compactos. De allí el nombre de *Teorema de Stone-Weierstrass*, como se lo conoce hoy.

tratar analíticamente. Incluso polinomios corrientes se pueden expresar en términos de los polinomios de Bernstein, como es el caso de $p(x) = 1$, $p(x) = x$, $p(x) = x^2$, que se expresan en términos de polinomios de Bernstein con el recurso de las siguientes fórmulas:

1) $p_n^1(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$

2) $p_n^x(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x$

3) $p_n^{x^2}(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} x + \frac{n-1}{n} x^2$.

La primera formula es inmediata, como lo vimos antes, pues $1 = x + (1- x)$ y al expandir este último binomio con la fórmula de Newton da ese resultado. Las otras igualdades se pueden verificar caso por caso para $n = 1, 2, 3,\ldots$, o usando las propiedades de los coeficientes binomiales. Un estudio detallado de la conexión de los polinomios de Bernstein con el movimiento browniano se puede ver en un artículo de Emmanuel Kowalski.[19]

Sabemos que el conjunto de todos los polinomios de una variable forma un espacio vectorial y que este espacio se puede generar como combinación lineal del conjunto $\{1, x,\ldots, x^n \ldots\}$. El conjunto de los polinomios de Bernstein se constituye también en una base, no sólo para los polinomios sino para todas las funciones continuas en [0, 1].

El movimiento browniano corresponde al aparentemente caprichoso vaivén de partículas microscópicas en un fluido. El fenómeno fue primeramente observado por Robert Brown en 1827 al estudiar el comportamiento de los granos de polen en el aire sujetos a la interrelación del movimiento de las moléculas a su alrededor. Su estudio teórico desde el punto de vista de la teoría de probabilidades es abundante como puede notarse a través de la gran cantidad de literatura en torno al tema. Las gráficas del movimiento browniano corresponden a trayectorias continuas pero no diferenciables en ninguna parte, a las que los polinomios de Bernstein pueden simular con cualquier grado de aproximación.

Otra aplicación del árbol binario está en la teoría de probabilidades. Supongamos que x un número real en [0, 1] y sea **X** una variable aleatoria con distribución Bernoulli, de tal forma que la probabilidad $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 1) = x$, y $\mathbf{P}(\mathbf{X} = 0) = 1 - x$. El suceso $\mathbf{X} = 1$ significa un ensayo exitoso y $\mathbf{X} = 0$, significa un ensayo fallido. La fórmula 1), arriba, corresponde a la suma de todas las probabilidades de n ensayos de Bernoulli independientes. Esta igualdad confirma que la suma de las probabilidades de todos los sucesos en el espacio muestral es 1, independientemente del valor de n.[20] Sea $\{X_i\}$, $1 \le i \le n$, una sucesión de variables aleatorias independientes asociadas con los resultados de n ensayos de Bernoulli, y sea $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, el número total de éxitos. Entonces S_n tiene distribución binomial. Más exactamente

---

[19] **Kowalski, E.** *Bernstein Polynomials and Brownian Motion.* The American Mathematical Monthly. December 2006.

[20] Ver: Golstein, L. *A probabilistic Proof of the Lindeberg-Feller Central Limit Theorem* . The American Mathematical Monthly. January 2009.

$P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, para k = 0, 1,…, n. La distribución acumulativa está dada por

$$P(S_n \le m) = \sum_{k \le m} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Aquí vuelve a aparecer una expresión similar a la mencionada antes en los polinomios de Bernstein. Esta conexión con el árbol binario va a continuar con la transformada de Haar y más allá aun, hasta las wavelets. Las wavelets van a desempeñar el papel de elementos básicos para representar ciertas funciones relacionadas con el procesamiento de ondas, ya sonoras, como en el Ipod y el celular o lumínicas como es el caso del video, de las imágenes en el escanógrafo, el ecógrafo, la cámara digital, etc.

La Transformada de Haar y las Wavelets.

El hablar de espacios vectoriales en los últimos años de la educación básica va a permitir la introducción de espacios diferentes al de los polinomios, entre esos el espacio de las funciones continuas definidas en un intervalo cerrado [**a** , **b**].

Mencionábamos que el espacio vectorial de todos los polinomios de una variable se puede generar como expansión de un conjunto específico de polinomios. Este conjunto se llama una base para el espacio vectorial. Una base muy útil, tiene que ver con las series de Fourier y otra base usada hoy en las nueva tecnologías se llama *Wavelets* y tiene la particularidad de que se ajusta a las funciones que va a aproximar; más exactamente, es una base dinámica a diferencia de las bases anteriores que son estáticas. Por ejemplo, todos los puntos del espacio tridimensional se pueden expresar como combinación lineal de los elementos de la base {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}; en general el punto $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ de $\mathbf{R}^3$ se puede descomponer como x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1). Esta base, además de poder generar todo $\mathbf{R}^3$, tiene la ventaja que sus vectores son unitarios y ortogonales, en el sentido de que su magnitud o norma es 1 y todos ellos son ortogonales entre si. Lo primero quiere decir la magnitud medida por la norma, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$. Esta fórmula aplicada a los vectores de la base es 1. Lo segundo significa que si x, y son diferentes vectores de la base su producto escalar, definido por $x \bullet y = (x_1,\ x_2,\ x_3) \bullet (y_1,\ y_2,\ y_3) = x_1\ y_1 + \ x_2\ y_2 + \ x_3 y_3 = 0$. Esto también es fácil verificarlo con cada par de vectores de la base.

Las *wavelets* aparecen en las matemáticas alrededor de los años de 1980 en el proceso de encontrar formas más simplificadas para estudiar la aproximación de funciones periódicas como las ondas o funciones caprichosas que no se acomodan a los modelos clásicos y no se pueden tratar analíticamente. Los antecedentes históricos de las wavelets hay que buscarlos primero en la teoría de las series de Fourier y luego en la transformada de Haar. Alfréd Haar (1885-1933) fue un brillante matemático húngaro que estudió bajo la tutela de David Hilbert en Gotinga, cuando los espacios abstractos como los espacios vectoriales y los espacios de Hilbert hacían su irrupción en las matemáticas. Su tesis de grado tuvo que ver con convergencia de expansiones ortogonales de funciones como las trigonométricas o relacionadas con sistemas derivados de ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville. El fue el primero en construir bases ortonormales para explicar la divergencia de ciertas familias de funciones expandibles como series de sistemas ortonormales de funciones. Estas bases ortonormales muy simples se conocen hoy como transformadas de Haar y se constituyen en las primeras y más simples bases ortonormales de funciones discontinuas, que llevan el nombre de wavelets. Detalles descriptivos y técnicos además de un gran número de aplicaciones de las wavelets y la transformada de Haar se encuentran en la Web.

Lo que hemos tratado aquí superficialmente busca mostrar que en la educación media se puede introducir una amplia gama de temas matemáticos. Las nociones de lógica y teoría de conjuntos que hoy se enseñan desdibujan lo que es la verdadera lógica simbólica o matemática, en su lugar deberíamos enseñar las primeras aproximaciones a lo lógica matemática comenzando con los trabajos de Tarski y Gödel de los años treintas del siglo pasado y nociones de computabilidad. Estos temas llegarían a enriquecer el espíritu y van a abrir las puertas al entendimiento de la ciencia moderna y específicamente de la ciencia de la computación teórica y de la tecnología de nuestro tiempo.

Conclusión. A lo largo de este trabajo he esbozado algunos temas de las matemáticas de nuestro tiempo, que se ignoran, pero susceptibles de ser introducidos en la educación básica. Para lograr cambiar el estado de cosas en la educación matemática hay que hacer cambios profundos, no sólo en los currícula, si no también en la formación de nuevos educadores con formación humanística y científica, que entiendan el compromiso de educar para el futuro. La base de la formación de este nuevo docente está en una nueva universidad que tenga como filosofía central el poner a tono la educación con la época que estamos viviendo y con las épocas que van a vivir las juventudes que estamos formando.

Armenia, Colombia, Agosto de 2009.