

En Busca de Alternativas Nuevas para la Educación Matemática Universitaria

Diego Pareja-Heredia. *Universidad del Quindío*

“Tiempo hace ya que la principal fuerza impulsora hacia una mayor igualdad social, es la difusión del conocimiento y el énfasis en el profesionalismo”. Thomas Piketty¹

“La sabiduría convencional necesita ser cuestionada si queremos crear cualquier tipo viable de sociedad libre”. David Graeber²

I Parte. Reseña Histórica de la Educación Matemática

II Parte. ¿Matemáticas Puras o Matemáticas Aplicadas? ó ¿Simplemente Matemáticas?

Resumen

Las deficiencias que adolece la educación matemática han sido sobradamente diagnosticadas; al menos, desde hace cincuenta años. En esta exposición propondré a los educadores matemáticos algunas consideraciones que sirvan de elementos básicos para buscar nuevas alternativas para mejorar la formación matemática de nuestros alumnos.

En la primera parte haremos un repaso de la educación matemática desde los tiempos de Hammurabi hasta la influencia de la Escuela Bourbaki, pasada la segunda guerra mundial. En la segunda parte propondremos las bases para iniciar un cambio radical en la educación matemática con miras a lograr una mejor comprensión de las matemáticas como parte fundamental de la cultura humana contemporánea y como eje en la formación racional del intelecto.

Abstract

Deficiencies in math education have been over diagnosed at least over the past fifty years. Through these lectures I'll propose to math educators some suggestions to be considered as reasons to change the aim toward a better math background for our future students.

In the first part of this paper we'll make an historical overview of math education beginning at Hammurabi's time's until past World War II, when Bourbaki School flourished. In the second part we state some basis for a radical change in math education to get a better math comprehension; understanding mathematics as a part of human culture and as the kernel in the rational intellect formation.

¹ Piketty, T. *Capital in the Twenty-First Century*. Translated by Arthur Goldhammer. The Belknap Press of Harvard University Press. Cambridge, Mass. London, England. 2014. Page 22

² Graeber, D. *Guía Práctica para Utopistas antes del Próximo Colapso*. El Malpensante. Agosto, 2014. Bogotá.

I Parte

Reseña Histórica de la Educación Matemática

Introducción.

Abordar un tema como la educación matemática universitaria presume un conocimiento importante en relación con los conocimientos adquiridos en etapas previas al nivel universitario y por supuesto, es necesario hacer una retrospectiva histórica de lo que ha sido la educación matemática en los últimos cuatro milenios. Por esta razón dedicamos la primera parte de este trabajo a un esbozo descriptivo de algunos pasajes de la historia de las matemáticas, y en la segunda parte haremos algunas consideraciones relativas a la educación media, que consideramos deben tenerse en cuenta al presentar un plan de reforma curricular universitaria que supere a los tantos que en nuestro medio no han dado los mejores resultados.

El interés por la educación se resalta en todos los ámbitos de la cultura mundial. Basta mirar las citas que encabezan estas notas y los titulares de primera página de los más importantes diarios del mundo para notar que la educación es tema obligado en todos ellos. En enero de 2010, por ejemplo, el presidente Obama hizo un reconocimiento a la Universidad de Colorado por reforzar la calidad en la formación educativa; hoy cuatro años después, (septiembre 3 de 2014) aparece en las noticias que la misma universidad figura entre las 50 mejores del mundo. En España, Francia y demás países de la Unión Europea se invierten grandes presupuestos para financiar los cambios en educación, que la sociedad exige bajo la presión de las nuevas tecnologías. Latinoamérica también viene haciendo grandes esfuerzos por mejorar la calidad de su educación, aunque aún, resultados como las pruebas PISA, no la favorezcan.

En la reseña histórica que hacemos aquí queda por fuera la historia educativa de las culturas precolombinas. La razón que justifica esta ausencia es el poco conocimiento al que hemos tenido acceso en nuestros estudios. No obstante disponer de fuentes secundarias como los escritos de los cronistas de indias, el sustrato fundamental para una investigación son las fuentes primarias que, o fueron destruidas por los conquistadores, o vetadas por el aparato de dominación religiosa que acompañó la conquista. En otros artículos he puesto de presente lo importante que fueron las matemáticas en las culturas precolombinas que arraigaron en centro y sur América³.

La Educación Matemática que antecedió a los Griegos

Cuando hablamos de Babilonia nos referimos a la cultura que floreció en los valles de Mesopotamia entre los ríos Tigris y Éufrates a partir del III milenio antes de nuestra era (a. N.E.). En esta cultura podría decirse que reposa el germen de la cultura occidental. Es allí

³ Ver por ejemplo: *Las Matemáticas en las Culturas Precolombinas*. Memorias de Eventos Científicos Colombianos. No. 34. ICFES. Bogotá, 1986.

donde la historia tiene sus inicios, por cuanto que, a nosotros ha llegado buen número de documentos que al interpretarlos nos hablan de su conocimiento sobre matemáticas y astronomía. Estos documentos ya usan una escritura como vehículo para pasar de maestro a alumno el conocimiento, tanto científico como técnico, incluyendo desde luego, los primeros asomos a la práctica médica. Otro polo de desarrollo paralelo, estuvo en las riveras del Nilo donde la escritura jeroglífica, aun hoy está a la vista en los variados monumentos en el actual Egipto.

Tanto en Egipto como en Babilonia el poder del conocimiento y la escritura era de uso exclusivo de la casta sacerdotal. Es decir la transmisión del conocimiento iba ligada a la formación de nuevos escribas y sacerdotes y los templos no sólo eran sitios de culto, también eran bibliotecas, observatorios, talleres y desde luego lugar de reunión de maestros y discípulos ávidos de aprender y perpetuar el conocimiento traído de generación en generación. Así que los templos de aquellas remotas edades eran las universidades en estado incipiente.

Dada la importancia de medir el tiempo y conocer los ciclos periódicos de las estaciones o de las temporadas de verano e invierno, por razones de supervivencia, el primer conocimiento que se debería transmitir de maestro a alumno debió ser el relacionado con la astronomía. En su estado primitivo, la astronomía no hacía diferencia con la astrología, porque el hombre desde etapas tempranas de su evolución ha considerado que su vida depende del acaecer astrológico. Fue entonces que la sabiduría astrológica poco a poco se convirtió en astronomía, con sus técnicas computacionales para la predicción del tiempo y de los fenómenos celestes como son los eclipses. De la cultura babilónica aún nos queda la forma de medir el tiempo en años, meses, días, horas, minutos y segundos. También su sistema sexagesimal se usa en la división angular y en la división de la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.

En Egipto y Babilonia se dan las primeras puntadas hacia el conocimiento geométrico, posiblemente a través de la medida de la superficie de terrenos a distribuir entre los habitantes de la comunidad. También allá aparecen sistemas numéricos que facilitan los cálculos en la medición. Mientras los egipcios usaron un sistema decimal (aunque no posicional), los babilonios se ocuparon de hacer sus operaciones en sistema sexagesimal (combinación de aditivo y posicional). Algunas tablillas de escritura cuneiforme de la época de Hammurabi (1750 a. N. E.) hacen alusión a la rectificación del calendario, a la predicción de eclipses, al control de las inundaciones y al manejo de la producción agropecuaria del imperio.

Alrededor del siglo XVII a. N. E. los babilonios ya estaban en capacidad de resolver la ecuación general de segundo grado del tipo, $ax^2 + bx = c$. También por esta época se inicia la teoría de números como la entendemos hoy, como el estudio de las propiedades de los números naturales. Esta parte de las matemáticas que siempre se ha creído no tener aplicaciones, ha mostrado su utilidad en tiempos recientes en relación con la teoría de códigos y la criptología. La criptología tiene que ver con la encriptación de mensajes para evitar que la información llegue a manos equivocadas. En particular, una famosa tablilla babilónica, conocida como Plimpton 322, exhibe una lista de ternas de números correspondientes a soluciones de lo que se conoce como una ecuación diofantina en tres variables, $x^2 + y^2 = z^2$. Las soluciones a esta ecuación se llaman triplas pitagóricas y la tablilla contiene 15 soluciones primitivas, es decir ninguna de ella se deriva de las otras por multiplicación. Aparentemente, tablillas matemáticas como éstas, tenían una función instructiva para uso de estudiantes interesados en conocer la respuesta a problemas, propuestos con el ánimo de retar la

inteligencia. Estos textos ya insinúan la difusión del conocimiento matemático, lo que implica el inicio de la relación entre maestro y alumno.

La Educación Matemática en la antigua Hélade.

Desde tiempos homéricos, cuando se escribe *La Ilíada* y *La Odisea*, los aqueos, cuyo origen era griego, ya se perfilaban como hábiles marineros, lo que implica conocimiento de las técnicas de orientación astronómica y las artes de navegación en general. Ese conocimiento, desde luego pudo ser aprendido o heredado de los fenicios, que fueron los marinos que los antecedieron en las costas del mar Mediterráneo. Este conocimiento aunque práctico tiene su soporte en la astronomía y en la mecánica. De la astronomía nacen conceptos tan importantes como la medición angular y la medida del tiempo y del espacio y para los procesos de medición se hace indispensable los sistemas de numeración y sus correspondientes algoritmos.

Ebla, una ciudad floreciente en el III milenio a. N. E. situada bien al norte de Mesopotamia y cuyas ruinas se descubrieron en 1964, pudo haber sido el puente entre Babilonia y las culturas de origen griego que se desarrollarían en el Asia Menor colindantes con el Mar Mediterráneo, corriendo el I Milenio a. N. E. Por vecindad geográfica, por tráfico comercial o por dominación bélica de Persia, las matemáticas que se originaron en la antigua Mesopotamia, debieron transmitirse y empezaron a desarrollarse en importantes culturas de ascendencia griega, conocidas como culturas jónicas, arraigadas en Mileto y Samos, por ejemplo. Tales de Mileto y Pitágoras de Samos son dos de los matemáticos más citados de la antigüedad que contribuyeron, no únicamente a las matemáticas sino también a la filosofía y al nacimiento de la ciencia en Occidente. El archivo de Ebla contiene más de veinte mil tablillas de cerámica, lo que presume la existencia de una gran biblioteca donde se mantenía la información contenida en esas tablillas. Esta biblioteca debió ser el sitio de estudio y transmisión del conocimiento de profesor a alumno. Así hemos pasado de la universidad templo entre los egipcios a la universidad biblioteca en Ebla.



Vista aérea de las excavaciones del Tell Mardikh al norte de Siria, en el sitio que ocupó Ebla en el III milenio a. N. E. Aquí se halló una biblioteca con más de veinte mil documentos (Foto en la Web de National Geographic).

La cultura occidental tiene como referente básico la llamada cultura griega que tuvo su época de oro alrededor del siglo V a. N. E. Por esta época la filosofía griega tiene su máximo esplendor con hombres de la talla de Anaxágoras, Zenón de Elea, seguidos de Sócrates, Platón, Aristóteles y otros más. Es a través de la filosofía, cómo las matemáticas empiezan a permear todo el espectro de la cultura griega. Sócrates inaugura otra esfera de la cátedra universitaria, con la consagración de la *mayéutica* como método de aprendizaje, al confrontar al alumno consigo mismo a través de sus respuestas a preguntas formuladas inteligentemente por el profesor. Este estadio nuevo donde se debate el conocimiento del alumno frente al profesor se ha conservado en la educación hasta nuestros días, aunque en menor escala a como se practicaba en la época en que se escribieron los diálogos de Platón. La universidad en este nivel de desarrollo ha salido del templo y la biblioteca para ampliar su cobertura al diálogo entre maestro y alumno y a través de la escritura, entre escritor y lector. En esta época también nace la institución universitaria como tal, donde maestros y discípulos se reúnen en aras de aprender y enseñar filosofía, y a la par, las matemáticas que empezaban a inundar las mentes jóvenes de los primeros aficionados a la especulación matemática. La Academia de Platón, presumía que los allegados a ella deberían tener ya conocimientos de geometría, según reza la admonición a su entrada: “*Que no entre aquí quien no sepa Geometría*”. Posteriormente se inaugura el Liceo cuya figura descollante es Aristóteles. Platón y Aristóteles fueron matemáticos, como en general eran los filósofos de aquel tiempo.

Las matemáticas en Grecia, desde el siglo V a. N. E. ya tienen su esencia característica, como es, el desarrollo lógico y la aplicabilidad como herramienta para explicar los fenómenos de la naturaleza. Muchos resultados, tanto en geometría como en teoría de números, vienen de culturas anteriores a la griega, como de Egipto y Mesopotamia, pero es en el equivalente griego a las universidades de nuestra época, donde esos resultados se convierten en verdades matemáticas con su respectivo soporte argumental, es decir, el resultado es ahora un teorema en una teoría matemática. Y así como lo hicieron para las matemáticas intentaron hacerlo con otras ramas del conocimiento para originar lo que hoy llamamos ciencia. Fueron los filósofos

de esta época los que dieron ese toque racional a logros de matemáticos que los precedieron un siglo antes, como Tales y Pitágoras. Un resultado transmitido a nosotros por Aristóteles como es el de la infinitud de los números primos, hoy considerado como uno de los más bellos teoremas de las matemáticas, por su simplicidad y elegancia, lleva ese toque de solidez derivado de una argumentación férrea que lo soporta. También Platón exhibe interesantes resultados en teoría de números con una sustentación que nada envidia a las demostraciones de teoremas de las matemáticas actuales. Como afirma Morris Kline “[Platón] deseaba no sólo entender la naturaleza a través de las matemáticas, sino también trascender la naturaleza misma para comprender el mundo ideal, matemáticamente organizado, en el que creía él, existía la verdadera realidad”⁴.

Sobre la Palabra Matemáticas

El Fedro de Platón, sugiere que el dios egipcio de la sabiduría Tot, inventó los números y sus técnicas de cálculo, la geometría y la astronomía, los juegos de cartas y dados; y sobre todo la escritura. Sin embargo Aristóteles en su obra *Metafísica* afirma que las ciencias o artes matemáticas (*mathematikai technai*) se originaron en la clase sacerdotal egipcia por ser la única en poderse dar el lujo de dedicar su tiempo a estudiar las matemáticas por las matemáticas mismas. La designación de *mathematikoi* (matemáticos) a quienes se dedican al estudio de las matemáticas viene desde la época de los pitagóricos, los seguidores de Pitágoras. Según la documentación copiada por Solomon Bochner⁵, el término inicialmente se usó para designar a los estudiantes del equivalente a algo como una escuela de graduados para adultos que eran asiduos asistentes a clases; mientras, a los asistentes eventuales, se los llamaba *oidores* (*akousmatikoi*). La palabra *matemáticas* (así como suena con la s al final y no “matemática”) se viene usando desde tiempos griegos, con la acepción de aquello que ha sido aprendido o entendido, o conocimiento adquirido o adquirible en virtud del aprendizaje. La restricción de este conocimiento general al específico de lo que hoy entendemos por matemáticas procede al menos desde el tiempo de Aristóteles.

Lo anterior nos muestra cómo, desde su orígenes, “*las matemáticas*” son enseñanza y desde luego aprendizaje. De allí se sigue que la educación matemática es connatural con las matemáticas, y consecuentemente, los temas relacionados con la innovación y puesta al día de la enseñanza de las mismas, son muy importantes para las matemáticas mismas.

Jean Etienne Montucla (1725-1799), el primer historiador moderno de las matemáticas, se refiere a *les mathematiques* (“las matemáticas”) en su extensa historia de las matemáticas publicada en 1799. La supresión de la s (*matemática*) en idiomas como, español y francés viene del tiempo de la Escuela Bourbaki (alrededor de la década de 1940). Lo cierto es que la s en las palabras de origen griego no necesariamente indica plural, como en los casos de los términos *psiquis*, *análisis*, *hipótesis* y otros.

⁴Kline, M. *Mathematics and the Search for Knowledge*. Oxford University Press. New York, 1985. Pag. 42.

⁵Bochner, S. *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. Princeton University Press. Princeton, N. J. Fourth Printing 1981. Pag. 27

De la Universidad de Alejandría a la Universidad de Bolonia

Con las conquistas de Alejandro Magno (siglo IV a. N. E.) el mundo griego se extendió para incluir a la ciudad de Alejandría, que desde esa época sería el epicentro de las matemáticas, por casi un milenio. Fue allí, y en particular en la biblioteca de Alejandría donde muchos matemáticos trabajaron, incluyendo a Euclides (Siglo III a. N. E.) y Eratóstenes. Alejandría será recordada por su museo y biblioteca, que conformaban, lo que podríamos llamar ahora, la universidad. Euclides escribió aquí sus *Elementos*, el mayor compendio de las matemáticas hecho hasta ese tiempo, y es en este entorno donde las matemáticas se expanden considerablemente. Aquí Apolonio escribió su tratado sobre las cónicas y muchos de los trabajos de Arquímedes en mecánica y matemáticas, estuvieron ligados a esta escuela. La trigonometría y la astronomía también se desarrollaron aquí, en los primeros siglos de nuestra era, con el concurso de Hiparco, Menelao y Tolomeo. También son dignos de mención Herón, Pappo, Theon, Hipatia y Diofanto (el inolvidable autor de la Aritmética), como los últimos matemáticos de la escuela de Alejandría.



Una representación pictográfica de la Gran Biblioteca de Alejandría según von Corven (Tomada de Wikipedia).

En los siglos posteriores a la decadencia de la cultura griega, el mundo occidental entra en un período de estancamiento donde la cultura estuvo regida por la iglesia. La investigación matemática y científica pasó a segundo plano o desapareció por completo. Algunos centros de cultura matemática, sin embargo, empezaron a destacarse en el ámbito árabe, donde fueron preservadas obras matemáticas de origen griego y donde se acogió la corriente matemática

procedente de la India. Lo más destacado de ello fue la difusión del sistema, llamado hindú-arábigo de numeración, de base decimal y hoy acogido universalmente. Parte de la cultura griega logró sobrevivir también por la vía Bizantina, por cuanto que muchos archivos y obras de origen griego se conservaron en la ciudad de Constantinopla, la ciudad de Constantino, uno de los últimos césares del imperio romano. La expansión musulmana por el norte de África hasta llegar a España fue un vehículo transmisor para que parte de las matemáticas griegas llegaran a occidente.

Durante el siglo XIII, el comercio entre países musulmanes del norte de África y las ciudades estado de la Italia de hoy, era fluido y a través de él se intercambiaba además de mercaderías, conocimientos y técnicas en ambos sentidos. Fue así como de este intercambio de conocimientos, llegó a Europa el sistema decimal con su simbología y algoritmia. Leonardo de Pisa, más conocido como Leonardo Fibonacci, fue producto cultural de la relación comercial entre una pequeña ciudad llamada Bugía (hoy en Argelia), al norte de África y la ciudad de Pisa. En efecto Leonardo por razón de su actividad como contralor de aduanas, por estar su padre en esta actividad, aprendió de sus colegas en Bugía el manejo del sistema decimal para efecto de hacer cuentas y cálculos comerciales. Al regresar a Pisa, después de varios viajes de estudio a Egipto, Siria, Grecia y Sicilia, escribió su más conocida obra, el *Liber Abaci* (Año 1202), pensada para enseñar el manejo del sistema hindú-arábigo de numeración. Aunque ésta no fue su única obra matemática, hay que reconocer que fue por ella que se recuerda a Leonardo como uno de los primeros difusores del sistema hindú-arábigo de numeración y ser clasificado como un revolucionario de las matemáticas. En palabras de Keith Devlin: “Leonardo de Pisa inició la revolución de la aritmética moderna.”⁶

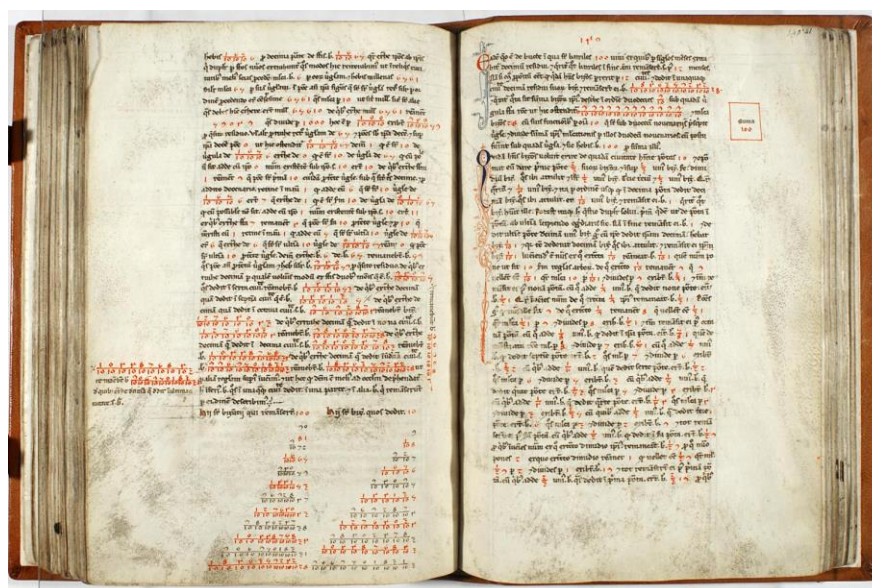


Imagen de dos páginas del *Liber Abaci* en una copia manuscrita de la edad media. (Foto tomada de Internet: NCB, Math in the Web).

⁶ Devlin, K. *The Man of Numbers. Fibonacci's Arithmetic Revolution*. Walker & Company. New York. 2011.

La era de la universidad como institución perenne, se inaugura con la Universidad de Bolonia en 1088. Fue creada por iniciativa de estudiantes de diversas nacionalidades europeas que buscaban capacitación y conocimiento en las ramas de las artes y las ciencias, que empezaban a florecer como consecuencia de las nuevas tendencias renacentistas. Las universidades de Padua, Paris, de Cambridge, de Oxford y la universidad de Salamanca le sucedieron y fueron las gestoras y jalonadoras de un retorno a los clásicos de las artes y las ciencias que habían tenido principalmente su origen en Grecia⁷. Las matemáticas no estuvieron alejadas de este proceso por cuanto muchas de las obras clásicas, entre ellas, los Diálogos de Platón y los Elementos de Euclides, se tradujeron del griego al latín. Se recuperaron de los archivos monásticos gran variedad de textos griegos y latinos, que se revisaban y editaban para hacer copias manuscritas que aun encontramos en las grandes bibliotecas de Europa. El *Trivium* (lógica o dialéctica, gramática, y retórica) y el *Quadrivium* (aritmética, geometría, música y astronomía) formaron la base para los estudios medievales de estas universidades. La *lingua franca* empieza a ser el latín y las universidades tendrán como cursos obligados el griego y el latín. Es en estas universidades donde las ideas revolucionarias de Copérnico y Galileo tienen su asiento inicial.

La razones por las cuales el latín se convirtió en idioma universal, además de ser el idioma oficial de la iglesia, fueron entre otras: su enseñanza en las universidades, su práctica como idioma común a los estudiantes que provenían de diferentes naciones y sobre todo lo anterior, el gran impacto que causó el redescubrimiento de la obra filosófica clásica de los griegos y las obras históricas y jurídicas de origen romano que se remozaron a través de nuevas versiones o traducciones del griego al latín o incluso del árabe al latín.

La Educación Matemática en Estilo Epistolar.

Un fenómeno interesante relacionado con la transmisión del conocimiento matemático fue el estilo epistolar que se popularizó entre los siglos XVI, XVII y XVIII. La correspondencia fluía de un matemático a otro y de éste a otros planteando preguntas e inquietudes sobre diversos temas matemáticos. A veces se formaban redes de matemáticos en torno a ciertos problemas. Un caso histórico interesante es la correspondencia entre Fermat y Pascal en relación con el entonces llamado *Problema de los Puntos*, centrado en el cálculo de probabilidades. Según Keith Devlin⁸, en esta relación epistolar anida el origen de la teoría de probabilidades, hoy una de las áreas de gran desarrollo matemático. Otras redes epistolares de matemáticos incluían a Leonhard Euler, Christian Goldbach y algunos miembros de la famosa familia Bernoulli. Otra más llevaba información entre Galileo Galilei, Marin Mersenne, René Descartes y Christian Huygens y hubo muchas más. El común denominador de esta relación epistolar era que se usaba un idioma común: el latín. Y en latín se escribían las obras que aspiraban transmontar las barreras geográficas y culturales. La gran obra de Newton,

⁷ Un libro recomendado para entender la transición entre la edad media y la edad moderna desde el punto de vista cultural y humanista es: Bullock, A. *La Tradición Humanista en Occidente*. Alianza Editorial. Madrid. 1989.

⁸ Devlin, K. *The Unfinished Game: Pascal, Fermat, and the Seventeenth-Century Letter that Made the World Modern*. Basic Books. 2010.

Principios Matemáticos de la Filosofía Natural (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) se escribió en latín, así como casi toda la obra de Euler, que no es poca (al menos ochenta volúmenes).

Otra modalidad de educación matemática no menos interesante es la interrelación directa maestro alumno que permite hacer el seguimiento de la red generacional de transmisión del conocimiento matemático al menos desde los tiempos de Leibniz. Hay una página especializada en internet que permite encontrar los ancestros matemáticos de los Ph. D.'s (Doctores en matemáticas) que abarca desde nuestros días a los tiempos de Gottfried Leibniz⁹.

El Siglo de las Luces y La Educación Matemática.

El siglo XVIII, en Europa tiene un paralelo en el siglo V a. N. E. en Grecia. Ese fue llamado el siglo de Pericles o el siglo de Oro de la cultura griega, donde filósofos, matemáticos, artistas, escultores y gran variedad de personalidades dan a esa cultura el toque de grandeza con que ha llegado a nosotros a través de sus obras clásicas. El siglo XVIII ha pasado a la historia como el siglo de la Ilustración, del Iluminismo o también, el siglo de la razón. Fue una época en que coincidieron nuevas tendencias intelectuales, particularmente inclinadas hacia el racionalismo en filosofía y el despuntar de nuevas corrientes en el pensamiento matemático inspiradas y promovidas por la creatividad de matemáticos de la talla de Leonhard Euler, Joseph Lagrange, Jean le Rond d'Alambert, que hicieron coro a las grandes obras de René Descartes, Isaac Newton, Christian Huygens y Gottfried Leibniz. Estas grandes figuras de las matemáticas tienen la particularidad de ser formados en las universidades europeas y son por así decirlo el subproducto de la intelectualidad universitaria.

La ilustración tiene su clímax en la *Revolución Francesa* de 1789, donde el régimen monárquico de Luis XVI es depuesto y se inicia en Francia el régimen republicano que perdura hasta hoy. La declaración de los derechos del hombre y del ciudadano y los principios de *libertad, igualdad y fraternidad*, se han venido convirtiendo en estándares universales para toda sociedad que aspira ser libre y democrática. La ilustración tocó todos los ámbitos de la cultura europea y tuvo entre sus consecuencias, el desplome del colonialismo característico de esa época. En particular en Latinoamérica, los gritos de emancipación se multiplicaron y llevaron a la independencia política a casi todas las naciones de este hemisferio. El sabio José Celestino Mutis y Alexander von Humboldt pueden considerarse como unos portavoces de la ilustración europea que llegó a América a fines del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX, creando su propia escuela de seguidores. Alexander von Humboldt, el gran humanista y explorador, era el hermano menor de Wilhelm von Humboldt, quien fue el equivalente a un ministro de educación en el gobierno de Federico Guillermo III, y a quien nos referiremos más adelante.

⁹ Esta página es Mathematics Genealogy Project que se encuentra en:

<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php>

En *El legado Intelectual de Euler* hago una pesquisa de mis ancestros matemáticos con la ayuda de la página citada. Ver: <http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias.htm>

La Edad de Oro de la Educación Matemática.

Sin desconocer que a lo largo del siglo XIX hubo grandes matemáticos en Europa, es digno de destacar que, las grandes luminarias y los centros de desarrollo y promoción de las matemáticas, estuvieron asentados en lo que en esa época se llamaba el reino de Prusia¹⁰, hoy Alemania. Empezando porque las famosas universidades de Berlín, Gotinga, Bonn, Jena, Königsberg, Erlangen, Heidelberg y Leipzig, entre otras, son las que llevan el liderazgo en la producción de una larga lista de matemáticos de primera línea. Iniciemos la lista con los nombres de Carl F. Gauss, Lejeune Dirichlet, Carl Jacobi, Ernst Kummer, Hermann Grassmann y Karl Weierstrass. Discípulos de los anteriores, aparecen, entre otros, Ferdinand Eisenstein, Bernhard Riemann, Heinrich Heine, Leopold Kronecker, Georg Cantor, Ferdinand Lindemann y cerremos con las estrellas más rutilantes de las matemáticas alemanas, Félix Klein, Hermann Minkowski y David Hilbert. ¿Qué pudo haber originado esta espléndida pléyade de matemáticos, además de destacados científicos, músicos, compositores y filósofos de renombre en un lapso de alrededor de un siglo?

Para responder, debemos situarnos históricamente en las secuelas dejadas por la ilustración, la revolución francesa y las guerras napoleónicas de comienzos del siglo XIX. Prusia había perdido la guerra contra Francia con un sin número de bajas que acabó prácticamente con la juventud. Aquí es donde la figura de Wilhelm von Humboldt aparece en escena. Al igual que su hermano Alexander, son egresados de la Universidad de Gotinga, con fina educación y relacionados con los mayores intelectos de su tiempo. Wilhelm es un filósofo y humanista de gran experiencia en la administración del estado y con una visión futurista muy grande. En estos términos se refería a la educación patrocinada por el estado:

“La auténtica finalidad del hombre —no aquella de inclinación cambiante, sino la que la infinita e inmutable razón le dicta— es la educación máxima y más equilibrada de sus fuerzas para formar un todo. Para esta educación la libertad es lo primordial y lo imprescindible de las condiciones. (...) Precisamente, la libertad junto a la universalidad, forman el bien más alto que da la sociedad, pero esa universalidad se pierde con certeza, en la medida que el Estado se entromete.”

¹⁰ Prusia era el nombre de la confederación de varios estados alemanes desde la época de Federico II, el Grande en el siglo XVIII.



A la izquierda: monumento al iniciador de la gran revolución educativa en Alemania, Wilhelm von Humboldt (Foto tomada de internet). A la derecha: el autor frente a la Universidad de Berlín con su esposa Neira.

Pasada la guerra el emperador Federico Guillermo III nombra a Wilhelm von Humboldt como el equivalente a un ministro de educación para reformar desde sus bases la educación pública. Wilhelm von Humboldt, como personaje influyente, tuvo bajo su responsabilidad la reorganización del sistema de educación pública en Prusia. Entre los aspectos a destacar de esa época figuran: la creación de normales para la formación de profesores, la creación de un sistema nacional de escuelas y colegios, con la característica de que en su programación aparecía una carga horaria de seis horas semanales de matemáticas. Durante su administración se creó la Universidad de Berlín y se estableció una clara filosofía en el contexto universitario: *libertad y universalidad*. La Universidad de Berlín, inicialmente bautizada como *Friedrich Wilhelm Universität*, lleva hoy el nombre de Universidad von Humboldt, en honor a quien fue el gestor intelectual del nuevo concepto de universidad. Fue en esta institución, a comienzos del siglo XIX que se acuñó el término, *Ph. D.* (del latín *Philosophiae Doctor*, o, *Docente en Filosofía*) para designar el título máximo que otorgaba la universidad en las áreas de ciencias y humanidades.

La Universidad de Gotinga jugó un papel importante en este proceso de cambio, por cuanto que, en los tiempos siguientes a la reestructuración educativa, la institución dedicó su mayor esfuerzo a la formación de profesores e investigadores. Esa tradición se mantuvo, hasta llegar a ser en los albores del siglo XX, la meca de las matemáticas, con Klein, Hilbert y otras luminarias más. Por esta universidad pasarían, como docentes, investigadores o profesores visitantes, famosos matemáticos y físicos que dieron lustre a las ciencias el siglo pasado; sólo para citar unos pocos nombres, mencionemos a: los hermanos Harald y Niels Bohr, Saunders MacLane, George Polya, Richard Courant, Hermann Minkowski, Edmund Landau, Carl Runge, Max Born, Hermann Weyl, Theodore Von Kármán, Ernst Zermelo, Erwin Schrödinger, Ernst Hellinger, John Von Neumann, Pavel Sergeevich Alexandroff y George David Birkhoff. Las tendencias modernas en cuanto a la concepción de *universidad* buscan

emular la calidad y el nivel que se impuso en la época en que se entronizó la *ilustración* en Alemania.¹¹



En la oficina que fue de Richard Courant (estudiante de Hilbert), con dos de sus discípulos, los profesores Kurt Friedrichs y Fritz John, aparece Diego Pareja Heredia en una visita al Courant Institute of Mathematical Sciences. Nueva York, 1977.

La Decadencia de la Educación Matemática entre las dos Guerras Mundiales y la aparición de la Escuela Bourbaki.

La I guerra mundial (1914-1918) dio al traste con el desarrollo intelectual de Europa. Esta conflagración se llevó mucho de lo que se había conseguido en los tiempos de paz. Particularmente, Francia perdió una generación de matemáticos y científicos formados, entre otras, en las prestigiosas universidades de París, en el Instituto Politécnico y en la Escuela Normal Superior de París. Esta pérdida dejó como consecuencia un vacío en el desarrollo educacional universitario, en particular en las matemáticas. Los libros de texto venían reciclándose desde el siglo anterior; y a comienzos de la década de los años treinta lo mejor que se encontraba como texto universitario, era el análisis de Goursat, que para ese tiempo lucía pasado de moda. El deseo de poner al día el currículo matemático universitario fue el acicate para que un grupo de matemáticos jóvenes, todos ellos egresados de la Escuela

¹¹ Ver mi artículo: *David Hilbert y su Escuela*, en : <http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/historiam.htm>

Normal Superior, liderados por André Weil y Henri Cartan, creara una especie de asociación, cuyo nombre de pluma o pseudónimo, terminó siendo *Nicolás Bourbaki*. Su objetivo era diseñar y escribir libros de nivel universitario con una orientación filosófica clara. Partiendo de las estructuras que subyacen en lo más profundo de los conceptos matemáticos, se buscaba llegar a las particularidades que normalmente se estudiaban por ese tiempo. Esta concepción, que hoy la conocemos como *estructuralismo*, se extendió a diferentes campos del conocimiento, incluyendo a la educación. Weil, famoso profesor que fue del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, dice en sus memorias:

“Al comienzo, nuestro objetivo apuntaba a lo pedagógico: dar los lineamientos fundamentales de la instrucción matemática a nivel universitario. Pronto entramos en el tema de la producción de un texto de análisis para uso a este nivel que entrara a reemplazar en el currículo el texto de Goursat”.¹²

El fenómeno del experimento bourbakista es aleccionador, por cuanto que, no obstante ser buena la intención de cambiar el currículo de las matemáticas universitarias en Francia en los años posteriores a la II guerra mundial, su tendencia se generalizó a tal punto de creer que estos cambios estructurales podían aplicarse a la educación matemática a todos los niveles. La escuela Bourbaki, se constituyó en un referente en el ámbito de la modernización de las matemáticas después de la II Guerra Mundial. Directa o indirectamente mi generación y otras más nos sentimos fuertemente atraídos por la matemática moderna. Muchas de las llamadas matemáticas puras derivaron de la tendencia formalista, que arraigó principalmente en Francia comenzando los años de 1940, liderada por la escuela Bourbaki. De esa época, por esnobismo, viene el cambio del nombre tradicional *matemáticas* por “*matemática*”. La creencia de que el formalismo en las matemáticas podría ser la panacea para que las matemáticas superaran sus dificultades en la enseñanza, se vino abajo con el colapso de la matemática moderna que se intentó implantar en Estados Unidos e Hispanoamérica iniciando los años de 1960.

La moda del estructuralismo se extendió rápidamente por Europa y también por Estados Unidos. Los cánones de exigencia en materia de educación matemática se cambiaron de lo operativo a lo conceptual y estructural, ya no interesaba mucho el cálculo numérico, era más importante conocer las estructuras algebraicas: de grupo, anillo, cuerpos y demás. Los niños empezaron entonces a memorizar propiedades y a recitar de memoria conceptos relativos a teoría de conjuntos, funciones, homomorfismos, isomorfismos que no casaban en su atmósfera vivencial. El *School Mathematics Study Group* (SMSG), que tendría gran influencia en la educación matemática de Estados Unidos y de Hispanoamérica, se inició en 1958 con el liderazgo, entre otros, de Griffith Baley Price y Edward G. Begle. En algunas universidades empezamos a estudiar algunos de los capítulos de *Éléments de Mathématique* (Elementos de Matemática) y los currículos nacionales iniciaron el proceso de transvase de los estándares de los Estados Unidos a nuestros currículos escolares. Los Cuerpos de Paz de la administración Kennedy ayudaron a difundir la moda de la *matemática moderna* por nuestro país y los libros de texto desde primaria a bachillerato hacían énfasis en la teoría de conjuntos y en las estructuras algebraicas. De todo ese boom, lo único que quedó en claro fue la palabra

¹² Weil, A. *The Apprenticeship of a Mathematician*. Birkhäuser Verlag, Basel. 1992. Pag. 105.

matemática, que entró a reemplazar a la palabra original *matemáticas*, que venía desde tiempos griegos.



El profesor Griffith Baley Price comparte mesa con Diego Pareja Heredia y otro participante en el congreso conjunto de la AMS y la MAA en la Universidad de Washington, Seattle en 1977. Este congreso tuvo significado especial por cuanto tuve la oportunidad de escuchar en conferencia a George Polya, habiendo cumplido ya los 90 años. También fue aquí cuando el profesor George Andrews presentó a la comunidad matemática, un manuscrito considerado perdido de Srinivasa Ramanujan. Baley Price fue uno de los primeros propulsores de la *matemática moderna* en Estados Unidos.

Desde el siglo XIX en las más importantes universidades de Europa se instauró la modalidad de organizar seminarios o reuniones de profesores y estudiantes para exponer y discutir temas específicos de las matemáticas. Hilbert fue un abanderado de este estilo de actividad académica para atraer estudiantes y expertos en muchos temas. En el siglo XX el Seminario Bourbaki se constituyó en una institución que estuvo activa y publicando hasta fines de siglo. Esta nueva forma de transmitir conocimiento entre profesores y alumnos y de colegas a profesores aun se mantiene y se estimula por cuanto que en el roce intelectual de los participantes se genera una dinámica que ayuda y estimula la producción matemática. Por los efectos beneficiosos de los seminarios, las universidades procuran en todas las latitudes patrocinar e instar a las facultades a que organicen estos eventos académicos.

II Parte.

¿Matemáticas Puras o Matemáticas Aplicadas? ó ¿Simplemente Matemáticas?

Introducción histórica

El aparente divorcio entre matemáticas puras y matemáticas aplicadas es un fenómeno relativamente reciente. En el tiempo del liderazgo matemático alemán al comienzo del siglo XX, David Hilbert en su pensamiento universalista nunca hizo distinción entre unas y otras. Para él siempre, desde tiempos griegos, las matemáticas eran una disciplina intelectual con muchas ramificaciones empotradas históricamente en el núcleo del conocimiento científico y técnico. Hablando de matemáticas aplicadas David Hilbert una vez dijo: “La física es demasiado importante para dejársela a los físicos”. Otra ocasión, el mismo Hilbert, en una conferencia conjunta de Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas, a donde fue invitado para ayudar a limar, algunas asperezas existentes entre matemáticos supuestamente adscritos a uno u otro bando, dijo:

“Se nos dice a menudo que las matemáticas puras y las matemáticas aplicadas son hostiles las unas a las otras. Esto no es cierto. Ellas no son, no han sido, no serán, no podrán ser nunca hostiles la una a la otra, simplemente porque entre ellas no hay absolutamente nada en común.”¹³

Para Hilbert y en general para los matemáticos universalistas esta división nunca existió. Henri Poincaré otro de los grandes matemáticos de la historia pensaba igual, las matemáticas son un cuerpo teórico de grandes proporciones que permea todas las ciencias y en todas ellas contribuye como herramienta y soporte. De allí se deriva ese dicho común de que el valor de una ciencia depende de la cantidad de matemáticas que subyace en ella. Recordemos que Arquímedes, el primer matemático universalista de la historia, recorrió todas las matemáticas de su tiempo; desde la teoría de números hasta la geometría, de la mecánica a la hidrostática, de la astronomía hasta el cálculo integral, inaugurando un nuevo espectro de las matemáticas entre lo más puro que podría ser la teoría de números hasta los confines de las aplicaciones a ciencias que aún no habían nacido, como es el caso de la física, que como la entendemos hoy sólo nace con Newton en el siglo XVII.

Otro de los grandes universalistas del siglo pasado fue John von Neumann¹⁴. Discípulo y colaborador de Hilbert en temas relacionados con teoría de conjuntos; muy comprometido en mecánica cuántica, en teoría de juegos, y en gran medida uno de los creadores de la ciencia de la computación. Al igual que a Hilbert, a Poincaré, y a otros universalistas, es muy difícil situarlo en un lado o en el otro de la pretendida división entre matemáticas puras o aplicadas.

¹³ Citado en: Gamow, G. *One Two Three ... Infinity*. Dover, New York, 1988. Pag.24

¹⁴ Ver mi artículo: *John von Neumann y el Computador Moderno* en:

<http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/historiam.htm>

El Premio Abel (en honor al matemático noruego Niels Henrik Abel) que otorga la Academia de Ciencias y Letras de Noruega, es un reconocimiento al trabajo científico en el campo de las matemáticas, equiparable a un Premio Nobel. Este año de 2014, el galardón se otorgó al profesor Yakov Sinai, matemático ruso, de la Universidad de Princeton y del Instituto para la Física Teórica de la Academia de Ciencias de Rusia. Podría pensarse que Yakov Sinai es un matemático aplicado, pues su trabajo es tan conocido por matemáticos como por físicos, en razón a que su obra se explaya en temas tales como: sistemas dinámicos, física matemática, teoría ergódica y procesos que se mueven entre lo determinístico y lo estocástico, es decir, entre el orden y el caos. Sin embargo el premio va a dirigido a uno de los matemáticos (sin hacer diferencia si es puro o aplicado) más influyentes del siglo XX. El mismo Sinai hace mofa de la artificial división entre matemáticos puros y matemáticos aplicados, cuando escribe su artículo *¿Matemáticos y Físicos = Perros y Gatos?*¹⁵, para insinuar que la diferencia entre matemáticas puras y matemáticas aplicadas es insustancial.

En este artículo se narran algunas interesantes anécdotas de matemáticos y físicos famosos, en torno al enfrentamiento que nos ocupa. Menciona que Eugene Wigner (Premio Nobel de Física, 1963) en su artículo *La irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales*, termina con el siguiente párrafo:

“La sorprendente apropiación del lenguaje matemático para la formulación de las leyes físicas es un maravilloso regalo, que no nos explicamos, ni nos merecemos. Deberíamos tener gratitud por ello y aspirar que se mantenga en la investigación futura y que se extienda, [...], aun por supuesto, para sorpresa nuestra, a ramas más extensas del conocimiento.”

Las nuevas tendencias en física teórica, en particular, la teoría de cuerdas, serían inconcebibles sin geometría algebraica y sin topología¹⁶ o la mecánica cuántica no podría ser formulada si en su núcleo de desarrollo no usara matemáticas tan abstractas como es teoría de grupos y teoría de probabilidades. En ambos casos las matemáticas están allí como una herramienta de soporte y sustentación.

¿Qué son exactamente las matemáticas?

Esto se preguntaba Stanislaw Ulam. Y respondía: “... muchos han tratado de responder y ninguno ha tenido éxito en definir a las matemáticas. Ellas son siempre algo más de lo que se dice. Burdamente hablando, la gente sabe que tratan con números, figuras, relaciones, operaciones, y que sus procedimientos formales incluyen axiomas, pruebas, lemas y teoremas, algunos que, no han cambiado desde el tiempo de Arquímedes. En muchos casos las matemáticas son una especie de escape de la realidad. El matemático encuentra su propio nicho monástico y su felicidad en objetivos muy alejados de las cosas terrenas. Algunos las

¹⁵ Sinai, Ya. G. *Mathematicians and Physicists = Cats and Dogs?* BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. Volume 43, Number 4, October 2006, Pages 563–565.

¹⁶ Ver mi artículo divulgativo: *De los sólidos de Platón a la teoría de cuerdas*, en: http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/conferencias/S_Pla_Teo_Cuerdas.pdf

practican como quien se droga. El ajedrez juega algunas veces ese rol. En su infelicidad con lo que ocurre en este mundo, otros se adentran profundamente en una especie de arrobamiento dentro de las matemáticas.”¹⁷

Es muy difícil definir y particularmente un concepto que no se deja encasillar en una definición de un número limitado de palabras como es el caso de las matemáticas. Richard Courant y Herbert Robbins intentaron hacerlo en los años cuarentas del siglo pasado en el contenido de su libro *¿Qué son las matemáticas?*¹⁸ Sin embargo se quedaron cortos, pues de ese tiempo a ahora, las matemáticas se han multiplicado en contenido, en técnicas y enfoques. Harold Hardy, el gran matemático inglés, colega de George Polya en Cambridge y descubridor del genio matemático hindú Srinivasa Ramanujan, decía que un matemático, como un pintor o un poeta, es un hacedor de patrones. Si esos patrones muestran mayor permanencia en el tiempo, es porque la materia de que están hechos, son ideas.

Si Courant y Robbins trataron de responder a la pregunta con el recurso de un libro, más recientemente, Keith Devlin procura hacerlo en un capítulo de su obra *The Math Gene*. Allí uno se encuentra con una gama amplia de definiciones concebidas por filósofos y matemáticos desde el tiempo de Aristóteles hasta nuestros días. Por ejemplo, Andrew Gleason de la Universidad de Harvard, definió a las matemáticas como:

“La ciencia del orden. Aquí, orden lo tomamos en el sentido de patrón o regularidad. Es la meta de las matemáticas, identificar y describir las fuentes, las diferentes clases y las relaciones entre distintas categorías de órdenes”.

El mismo Devlin se atreve a dar la definición; “Las matemáticas son la ciencia del orden, de los patrones, de las estructuras y de las relaciones lógicas.”¹⁹

Como dice Stanislaw Ulam, las matemáticas son siempre algo más y así, poner límite a sus contenidos, a sus métodos y a sus alcances a través de una definición, es precisamente cortar las alas a un arte que siempre permanecerá siendo joven y en busca de horizontes nuevos. Las matemáticas que hoy se enseñan y aprenden en las universidades deberían ser distintas a las que se enseñaban hace cien o doscientos años y es por esta razón que, las matemáticas que enseñamos en primaria y bachillerato deberían también diferir análogamente en sus contenidos y en sus enfoques.²⁰

Las definiciones que de matemáticas se den, van a depender del contexto en el que se hable, pues es probable que para un “matemático aplicado” las matemáticas sean una ciencia, mientras que para un “matemático puro”, las matemáticas sean un arte en el mejor de los sentidos. En mi opinión, las matemáticas son una parte integral de la cultura humana. De ellas se han derivado grandes beneficios, empezando por las formas primitivas en épocas

¹⁷ Ver la introducción de: Ulam, S. M. Kac, M. *Mathematics and Logic. Retrospect and Prospects*. Frederick A. Praeger, Inc., Publishers. New York. 1968.

¹⁸ Courant, R., Robbins, H. Revised by Ian Stewart. *What is Mathematics?* Cambridge University Press. Second Edition. New York. 1996.

¹⁹ Devlin, K. *The Math Gene. How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers are like Gossip*. Basic Books. 2000. Pag. 74.

²⁰ Ver mi artículo *El Gran Vacío* en: Epistemología. Introducción y Propuesta Metodológica, que aparece en mis notas de clase del curso Epistemología de las Matemáticas y que puede descargarse de:

<http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/epistemologia.htm>

prehistóricas de aplicación a las nociones de cantidad, de forma y de razonamiento lógico. De las concepciones cosmológicas, astronómicas y físicas primitivas a través de las matemáticas se originan las ciencias. El carácter social de las matemáticas, por ejemplo, se ve reflejado en el cúmulo de conocimientos matemáticos que se originaron en Alemania y Francia durante el siglo XIX y cuyas aplicaciones derivaron en el desarrollo tecnológico del siglo XX, que hoy, iniciando el siglo XXI nos tiene en la cresta de la revolución informática donde, ni nuestra imaginación habría llegado, hace apenas cincuenta años.

En las siguientes secciones plantearemos una serie de consideraciones que nos llevarán a una reflexión crítica que apunte hacia la búsqueda de nuevas alternativas conducentes a una nueva concepción sobre la educación matemática.

¿Por qué enseñar matemáticas?

En las primeras sociedades agrícolas se podría pensar que era necesario usar la aritmética elemental para las labores del campo, digamos en la siembra, el cultivo, la cosecha, la disposición de los graneros, el comercio del grano, etc. Era entonces necesario aprender a sumar y posiblemente multiplicar. Las sociedades crecieron y sus relaciones llegaron a ser más complejas y en esa complejidad aparece la filosofía, la inquietud por saber las razones que originan los hechos.

El *quadrivium* (aritmética, geometría, música y astronomía) en tiempos pitagóricos, por razones filosóficas, tenía un peso específico grande, ya que su filosofía se fundaba en el concepto de número. Los pitagóricos profesaban gran culto a los números; empezando porque la aritmética, para ellos era la teoría abstracta de números, orientada a estudiar las propiedades y relaciones de los números naturales. Para nosotros el término aritmética lo asociamos al estudio de las cuatro operaciones y sus consabidas técnicas de cálculo. Eso en lenguaje pitagórico correspondía a la *logística*. La misma geometría fue aritmetizada, en el sentido de asociar a entes geométricos, números naturales que los identificaran. La música también entró en el mismo proceso, al hacer corresponder pares de números con intervalos armónicos. La astronomía, por supuesto, estaba formulada en términos numéricos.

Las matemáticas han venido evolucionando a la par con el desarrollo de la cultura humana. No podríamos concebir, por ejemplo, ni la filosofía, ni la ciencia sin matemáticas. Aún áreas tan lejanas como el derecho, al menos en el aspecto de la argumentación, tienen en las matemáticas un valioso apoyo. Un jurista de talla, como fue el francés, Pierre de Fermat, llegó a ser prestigioso matemático. Sus contribuciones a la teoría de números son bien conocidas, y más aún, es famoso su enunciado, históricamente bautizado como, *El último teorema de Fermat*. Este resultado que mantuvo a la comunidad matemática mundial en ascuas por casi cuatrocientos años, fue demostrado, hace apenas unos años, por el matemático inglés Andrew Wiles.

Hoy las matemáticas recorren todo el espectro de la cultura humana, aunque explícitamente no se manifiesten. Y es por eso que deben enseñarse como parte integral de esa cultura, a la que ha estado integrada históricamente desde sus orígenes. Las matemáticas de hoy son una acumulación de conocimiento que resiste la crítica y se enriquece con ella; permiten además

que sus resultados se usen para sustentar áreas completas de las ciencias y finalmente florecen en un espacio de absoluta libertad, sin dogmas ni restricciones que impidan su desarrollo. Su única guía es la razón. Las matemáticas, como agregado histórico de conocimientos, evolucionan y se enriquecen con cada generación y se proyectan en un sin número de resultados que, el ignoto futuro no nos permite avizorar las posibles aplicaciones en la mejora de la calidad de vida de los seres humanos. Joseph Fourier inventó las series y transformadas que llevan su nombre, para explicar el fenómeno de la transferencia de calor. Sin embargo, sus resultados vendrían a tener fantásticas aplicaciones hoy, en el procesamiento digital de imagen y sonido, en los aparatos de audio y de video, en las comunicaciones, etc., etc.

Los programas académicos de muchos países, incluyendo Colombia, reflejan la creencia de que las matemáticas son puras o aplicadas. Sin embargo, las matemáticas repetidas, son un cuerpo teórico y subyacen en todas las ciencias porque ayudan a explicar, justificar y apalancar los hechos científicos. Cuando a las matemáticas se las parcela de esa forma, quedan fragmentadas, difusas y pierden su solidez, como puede verse al estudiar los currículos que se basan en *Los Principios y Estándares para las Matemáticas de la Escuela* (*Principles and Standards for School Mathematics*) que emitió el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics) de los Estados Unidos y como es el caso del que hoy se sigue en Colombia.

Las matemáticas se sustentan en ideas bien concebidas unidas por ligamentos argumentales muy propios de la lógica y que le dan ese sabor a verdad y a consistencia. Cuando a las matemáticas se las saca de su contexto se vuelven frágiles, se fragmentan y pierden el encanto estético que las ha mantenido como un modelo de solidez a lo largo de los siglos y en todas las culturas. Las matemáticas cuando se usan en ciencias o en la misma praxis, se convierten en herramientas, se pueden sustituir por otras ya mecánicas o electrónicas como es el caso de las calculadoras de bolsillo y computadores de todo tipo. Nadie entonces va a decir que estos útiles instrumentos están haciendo matemáticas cuando operan, son, eso sí, subproducto de la labor de los matemáticos que han dado las bases para poderlos crear y configurar.

La enseñanza de las matemáticas sólo por sus aplicaciones puede convertirse en la memorización de rutinas y procedimientos cuyo estudio se vuelve tedioso y poco formativo. Desde hace tiempo las matemáticas en su enseñanza se han mantenido entre dos extremos: o se enseñan bien o se enseñan mal. En palabras del topólogo y antropólogo Raymond L. Wilder:

“Ninguna materia es tan susceptible a los extremos de enseñarse bien o de enseñarse mal, como son las matemáticas, y mucho de la mala enseñanza se origina en el fracaso de transmitir la excitación que produce el crear matemáticas. Una condición *sine qua non* para hacer a las matemáticas excitantes al alumno es, que el profesor se sienta así mismo, excitado cuando las aprende; si esto último no se da, ningún recurso pedagógico va a remediar este defecto.”²¹

Paul R. Halmos decía: “Matemáticas aplicadas son matemáticas feas”, para significar que el calificativo de aplicadas le daba un cariz antiestético. Cuando uno habla de matemáticas aplicadas debería especificar a qué éstas, están aplicadas para poder emitir un juicio de valor.

²¹ Wilder, R. L. *Evolution of Mathematical Concepts. An Elementary Study*. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1968. Pag. 4.

Si es que aplican a la física, estamos en física propiamente y no en matemáticas, igualmente, si sus aplicaciones van a otras ciencias. Y si las “aplicaciones” van a las mismas matemáticas el término es redundante por cuanto eso es lo que las matemáticas persiguen expandir su cuerpo teórico en gran variedad de direcciones.

Entonces preguntarán ustedes, ¿cómo sustentar la aparición de las matemáticas en la escuela? Pues del mismo modo que se sustenta la presencia de las cátedras de literatura, historia, bellas artes y ciencias. Todas forman parte de la cultura humana. A las matemáticas hay que enseñarlas, además, porque nos dan y enseñan pautas de orden, de rigor y de estética. Pero, ¿y de la solución de problemas qué; ¿no es acaso importante aprender a resolver problemas? Esas técnicas son parte de las matemáticas y se aprenden al paso que se asimilan las matemáticas, principalmente en el contexto matemático y no necesariamente tiene que tener la marquilla de biología, química, ingeniería y mucho menos las situaciones “de la vida real”, con lo que se pretende justificar los conocidos problemas de palabras que circulan en los textos de matemáticas. Los problemas de la vida real del estudiante no son los de una persona adulta que está confrontada con la subsistencia y con el corre corre del día, los problemas reales del estudiantes son los que le dicta su entorno y son ellos los que deben motivar el aprendizaje de las técnicas para resolverlos. El profesor de biología, química, ingeniería o de lo que sea, debe tener el suficiente conocimiento de las matemáticas para que él sí, muestre a sus estudiantes, con el criterio que le da su ciencia, la utilidad de las matemáticas como herramienta para resolver problemas en su propio contexto. Los profesores de matemáticas no deberíamos pisar esos terrenos sin un verdadero conocimiento de esas áreas. Además, porque el tiempo empleado en esos menesteres es tiempo que le quitamos a la enseñanza de nuestros propios temas matemáticos.

En palabras de Michel Paty, se debe enseñar matemáticas:

“...no porque las matemáticas sean útiles en primer lugar, sino porque las matemáticas son una forma de pensamiento, y desarrollarlas en las inteligencias jóvenes es una manera única, muy potente, del ejercicio de la razón (esto lo decía Descartes hace mucho tiempo). En principio, todos los seres humanos, por causa de la universalidad de la capacidad de razón, pueden entender las matemáticas (al menos hasta cierto punto, que puede ser muy avanzado). En segundo lugar porque las matemáticas enseñan a bien pensar, a razonar por nosotros mismos, a saber juzgar lo que es verdad y lo que es falso, libre de todo sujetamiento a la opinión o a la autoridad. También aprender las matemáticas es descubrir las ideas abstractas y este es un descubrimiento que se puede hacer en todas las edades y en particular lo hacen acertadamente las mentes jóvenes... Este pensamiento abstracto ayuda a comprender más fácilmente el mundo real concreto, más eficientemente”²².

²² Ver: Paty, M. *Simple Observaciones sobre las Matemáticas y la Educación Matemática*. Lecturas Matemáticas. Vol. 21 (2000). Pág. 4.

El estado del arte en relación con el tema del currículo.

Un currículo²³, en general, es un agregado de recomendaciones para la buena marcha del desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje. En nuestro caso, de las matemáticas básicas comprendidas entre el pre-kínder hasta finalizar la educación universitaria. La enseñanza de las matemáticas está en el núcleo de todo proceso educativo formal, por cuanto que, históricamente las matemáticas se han venido desarrollando paralelamente al desenvolvimiento cultural del género humano y arraiga en lo más hondo de las sociedades cultas. Desde que la educación básica forma parte de los derechos de la sociedad, empezando en la revolución francesa del siglo XVIII, la educación matemática ha estado allí, primero para cumplir el compromiso social de formar un ciudadano que se adapte a las necesidades de una revolución industrial en marcha, a través de su capacidad de análisis frente a nuevos problemas de supervivencia; y segundo para que pueda a través del estudio de las matemáticas acrecentar su poder de raciocinio y análisis.

Sin presumir universalidad, creo que no hay consenso entre los educadores matemáticos, ni entre los matemáticos en torno a las razones que deben exhibirse como sustentación para la tesis de que las matemáticas deben ser parte integral del currículo de la educación básica.

Una propuesta corriente de soporte para el currículo matemático luce así:

- 1 – Las matemáticas son la base de todo, desde la carpintería y la compra del mercado hasta la física. Con buenas bases matemáticas el estudiante queda preparado para lo que él decida ser en el futuro.
- 2 – El adiestramiento en solución de problemas, originados en problemas de palabras y pensamiento lógico es trasferible a muchas áreas, incluyendo a problemas del diario vivir.
- 3 – Las matemáticas están en el corazón de todo y sin entender el lenguaje matemático y su filosofía, los estudiantes van a dejar de apreciar su belleza y simplicidad.
- 4 – En las matemáticas siempre hay algo que los estudiantes van a usar en su vida diaria y las estrategias que se aprenden serán de utilidad en áreas fuera de las matemáticas.
- 5 – Las matemáticas ayudan a hacer la vida más llevadera cuando se conoce la forma de resolver problemas, aun cuando estos no involucren a las matemáticas.

Todo lo anterior es cierto. Aunque hay consideraciones de mayor peso con que podríamos apalancar un currículo de matemáticas para cualquier nivel educativo. El común denominador de las argumentaciones a favor de enseñar matemáticas a lo largo de la educación básica, tiene que ver con las aplicaciones de las matemáticas. Deberíamos decir que las matemáticas se estudian, por encima de cualquier otra consideración, porque el hombre necesita satisfacer

²³ Un análisis descriptivo de lo que puede ser un cambio curricular lo aborda el profesor Jeremy Kilpatrick (discípulo de dos grandes educadores: George Polya y Edward Griffith Begle en su artículo, *El profesor de Matemáticas y el Cambio Curricular* que puede descargarse de: http://matematicasyfilosofiaenlaula.info/posgrado/Kilpatrick_Ed._Def._El_cambio_de_Curriculo.pdf

la curiosidad de saber en qué sustentan los algoritmos aritméticos; a dónde nos conduce la abstracción de los símbolos algebraicos; qué está detrás de los procesos infinitos del cálculo; o la no aplicabilidad de la geometría euclidiana a una superficie curva como lo es la tierra y finalmente, entre muchísimos interrogantes más, saber el porqué de la solidez de las matemáticas cuando se compara con otras ciencias o disciplinas. Intentar responder esos interrogantes es mucho más formativo que resolver problemas de palabras o atiborrar a las mentes jóvenes y a veces infantiles de información que sólo se aprecia y dimensiona en la edad adulta frente a las circunstancias propias de la vida.

De unos años para acá las críticas a la educación matemática han sido duras²⁴, en parte porque los contenidos no satisfacen a los matemáticos profesionales y en parte por razones de resultados en las pruebas que a nivel internacional se llevan a cabo para medir el conocimiento de los estudiantes del bachillerato. A propósito, el profesor Anthony Ralston de la Universidad de Nueva York escribe:

“Los recientes resultados PISA (Program for International Student Assessment) que miden a nivel internacional el nivel de conocimiento matemático de los estudiantes de bachillerato, ha resaltado una vez más las continuas fallas de la educación matemática en Estados Unidos. Estas fallas han sido el centro de una continua controversia, las llamadas guerras matemáticas, entre los matemáticos de profesión y los educadores matemáticos. Esta confrontación se ha centrado principalmente en materias curriculares o en, cómo, o si la tecnología debería usarse o no, en la educación matemática. Pero lo más importante de todo, respecto a la educación matemática, es la calidad cuestionada de las promociones de profesores que egresan de las universidades; y esto, raramente se menciona.”²⁵

Esto es, en la formación de los profesores está la clave para una buena educación matemática. La tradición inveterada que hemos tenido los latinoamericanos de copiar los currículos foráneos no ha permitido mostrar nuestra identidad cultural. Hoy estamos copiando los *Principles and Standards for School Mathematics* (PSSM) de los Estados Unidos, para aclimatarlos a nuestros currículos. Confiemos que mañana, podamos sacudirnos de esta manía de plagiar planes de estudio de otras partes; más aun sabiendo que en el lugar de origen han sido un fracaso, como se muestra en las críticas que se hacen en revistas especializadas de hoy.²⁶

Los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (PSSM) aceptados por la mayoría de los estados en norte América es el mayor intento de uniformizar los currículos en Estados Unidos. Aunque la estandarización tiene sus ventajas también adolece de ciertas falencias originadas centralmente en el hecho de asumir que toda la población educativa tiene la misma idiosincrasia y el mismo entorno social, lo que realmente no es cierto. En opinión de quien escribe estas notas, un currículo debe consultar previamente el medio social en que se vive y el bagaje histórico que sostiene su cultura, principalmente el estado de desarrollo del educando. Y esto último es demasiado importante para pasarlo desapercibido. Creer que un

²⁴ En relación con las matemáticas universitarias ver por ejemplo el libro: Arum, R., & Roksa, J. *Academically Adrift. The Limited Learning on College Campuses*. University of Chicago Press. Chicago: 2011.

²⁵ Revista, Education Week 27. April 2005.

²⁶ Ver por ejemplo: Rivin, I. *Some Thoughts on the Teaching of Mathematics – Ten Years Later*. Notices of the AMS. June/July 2014.

currículo es una camisa de fuerza para acomodar a los estudiantes de diferente cohorte, es un despropósito, por cuanto un currículo debe tener como centro de gravedad el estudiante en persona y aceptarlo como viene y no como nos gustaría que llegara al salón de clase.

La última palabra en términos de currículo no se ha dicho y todos los educadores tenemos el derecho, y también el deber, de ponerle mano a un tema tan importante. Sería destacable empezar a desarrollar modelos de currículo dirigidos a grupos específicos de estudiantes, empezando desde luego, en el jardín infantil, con grupos de prueba que permitan un seguimiento estadístico de resultados. La universidad es la llamada a adelantar estos procesos de renovación educativa con la mayor seriedad en bien del mejoramiento educativo y social de los países latinoamericanos.

Mucho se ha hablado, escrito, y se siguen elaborando tesis de grado en los doctorados, sobre, *el cómo* enseñar matemáticas. Sin embargo no son abundantes los materiales, que resalten y cuestionen, el *qué* se está enseñando en las escuelas, colegios y universidades. En mi opinión habrá que empezar por el cuestionamiento de los contenidos matemáticos que se enseñan en los niveles mencionados. Queremos relieves además la necesidad de poner a tono esos contenidos con la época en que vivimos, donde la tecnología se convirtió en parte esencial de la vida diaria. Para comprender la tecnología y las complejas relaciones de la sociedad de hoy, se requieren matemáticas avanzadas diferentes a las que enseñamos hoy que son prácticamente las mismas que se enseñaban hace cien años o más.

Es importante destacar, como dicen los entendidos, el currículo como la política empieza en lo local. No hay currículos universales, como es creencia generalizada. Lo que puede ser un currículo apropiado para Finlandia o Singapur, no necesariamente es el acertado, digamos, para Armenia, Colombia, o El Cusco, Perú. Los pueblos y ciudades tienen sus particularidades propias que responden a una tradición cultural y social, que debe tenerse en cuenta cuando se inicia la planeación y desarrollo curricular. Una razón para ello es que la enseñanza en la escuela debería ser una extensión del proceso de enseñanza-aprendizaje iniciado en el seno del hogar y éste, tiene su raigambre en la sociedad de la cual se nutre.

Considero que debemos probar otras maneras de hacer planes de estudio tomando en consideración nuestro pasado y nuestras aspiraciones presentes, anteponiendo siempre el hecho de que ninguna área del conocimiento debe ser obstáculo; al contrario debe servir de apalancamiento que propicie la superación del individuo. En particular, las matemáticas deberían enseñarse teniendo en cuenta su capacidad de formación del pensamiento abstracto y racional, lo que a futuro servirá de criterio para tomar las decisiones importantes de la vida.

Matemáticas versus Logística

Para los pitagóricos la aritmética consistía en lo que hoy podríamos llamar teoría de números, que corresponde al estudio de las propiedades inherentes a los números naturales y a sus operaciones. Lo que tiene que ver con las aplicaciones a la vida diaria y a los problemas prácticos se englobaban en un área técnica llamada *Logística*. La teoría de números es la más antigua parte de las matemáticas como ya lo mencionamos con el ejemplo de la tablilla

Plimpton 322. La aritmética que se enseña hoy viene de la edad media y es casi en su totalidad logística. Este proceso de degradación de la aritmética es lo que hace que las matemáticas pierdan su encanto y su carácter formativo para la mente joven.

Una de las causas de la deserción en matemáticas es el hecho de que a las matemáticas se las enseña en forma fragmentada, sin conexión de una rama con las otras y sin permitir que la imaginación infantil se exprese en sus fantasías y en su curiosidad por los procesos imaginativos que generan el entusiasmo creativo. Las matemáticas deberíamos enseñarlas, no por sus aplicaciones, sino por lo que tiene de importante para el desarrollo mental y por la capacidad de formación de hábitos de reflexión y del manejo de la lógica y la argumentación. Para complementar la formación matemática del estudiante sería sano crear la cátedra de *logística* a lo largo de la educación media a donde converjan las aplicaciones de las matemáticas en contextos específicos ya sean de tipo comercial, físico o de otra especie. En física se tiene la cátedra de física experimental, donde el profesor experimentalmente busca complementar lo que el físico teórico desarrolla en su cátedra. Así mismo el profesor de matemáticas debería tener la ayuda y cooperación del profesor de logística que desarrolle y explique, con las modernas ayudas tecnológicas las aplicaciones de las matemáticas.

Estas inquietudes ambiciosas de separar las matemáticas de sus aplicaciones en la escuela pueden generar naturalmente controversia a todos los niveles. Por supuesto, es eso lo que buscamos a fin de sacar al docente del estado de marasmo en que se ha mantenido por centurias. La discusión de estos temas puede abrir nuevos horizontes a la enseñanza de las matemáticas en beneficio de la educación y de las matemáticas mismas. Sería una buena tarea para quienes trabajan en currículo el proceso de acomodar, según los niveles de la enseñanza, los materiales matemáticos apropiados en la asignatura de logística.

Las Matemáticas en la Enseñanza Universitaria

Un punto crítico de las matemáticas en la universidad es la enseñanza del cálculo infinitesimal. Mi posición sobre la enseñanza de las matemáticas en la universidad busca ser consistente con mi filosofía de no dividir las matemáticas en puras y aplicadas. Esto me va a generar de entrada un grave conflicto con la tradición vigente desde hace trescientos años, como es la de tener, como curso obligado en todas carreras técnicas el cálculo infinitesimal.

Al cálculo infinitesimal se llegó por el esfuerzo de un gran número de matemáticos desde Arquímedes hasta Leibniz y Newton. La esencia y soporte del cálculo infinitesimal reposa en el análisis matemático, la rama de las matemáticas que estudia los números reales en toda su amplitud; incluyendo a los números infinitamente grandes como a los infinitamente pequeños, a las funciones de variable real, de varias variables y aun a los espacios abstractos (métricos, topológicos, de Banach, de Hilbert, etc.); trata de convergencia, derivadas, integrales y muchas cosas más. Esto para significar que si queremos saber el porqué y el cómo del cálculo

infinitesimal, el camino matemático correcto es el estudio del análisis. Así lo entendió Euler y los grandes matemáticos que le sucedieron.

Los centenares de textos de cálculo infinitesimal que se han escrito y que siguen los profesores en la universidad de hoy son una mixtura de nociones de lógica y teoría de conjuntos, algo de álgebra abstracta, teoría de funciones, y lo más difícil de asimilar es el concepto de continuidad. El resto es memorización de procedimientos y rutinas que hoy están codificadas y con todas las aplicaciones en los computadores.

Considero que el énfasis en las aplicaciones del cálculo debe hacerlas quien tiene autoridad en el área específica, ya sea física, química o ingeniería. El profesor de matemáticas si debería estar en condiciones de sustentar, que la forma de introducir al estudiante en los terrenos del cálculo infinitesimal es a través del análisis matemático, por cuanto que allí reposa el meollo y la razón de ser de los procesos, que hicieron que el cálculo resultara tan útil. Lo demás es aprender de memoria y repetir lo que ya está escrito en alguna otra parte. La misma argumentación vale para la enseñanza de las matemáticas elementales que no debe ser la repetición y la rutina sino el descubrir la razón de ser de los números, los algoritmos, las funciones, las relaciones y en fin el conocer por qué las cosas funcionan así y no de otra manera. Y siendo aun más radicales, las matemáticas que se deberían enseñar en el bachillerato deberían ser suficientes para asimilar adecuadamente las materias propias de las carreras técnicas.

La formación de profesores.

No hay duda que en materia de educación, la clave del éxito para tal emprendimiento está en la formación de buenos profesores. Particularmente en matemáticas, donde lo que actualmente se enseña está tan distante de lo que es hoy, la investigación y el conocimiento matemático²⁷. Esto fácilmente puede constatarse al mirar noticias de prensa en relación con los ganadores de la Medalla Fields, premio que se da cada cuatro años a matemáticos jóvenes que han contribuido a extender las fronteras de las matemáticas. Al preguntarle al hombre de la calle sobre este tema, desconoce que más allá del álgebra de Baldor existen áreas de las matemáticas donde el medallista Fields logró semejante honor.

La educación de los pueblos es un proyecto de largo alcance, tanto en tiempo, como en inversión. Si un país aspira a elevar el umbral de su educación tiene que pensar a mediano y largo plazo. El primer paso a dar es la formación de los profesores de aquellos que dentro de veinte años serán los profesores que liderarán el cambio educativo. Es decir, parodiando el refrán chino, *“La mejor época para sembrar un árbol fue hace veinte años, la segunda mejor oportunidad, es hoy”*; y es ya, cuando tenemos que ocuparnos de formar los profesores de preescolar que se encargarán de encaminar bien a quienes van a desempeñarse como docentes dentro de dos décadas.

²⁷ Ver mi artículo: *El Gran Vacío entre la Educación Matemática y la Frontera de las Matemáticas*. Descargar de: <http://www.scm.org.co/aplicaciones/revista/Articulos/1022.pdf> o visitar mi página en: <http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/conferencias.htm>

Mientras los niños de hoy van creciendo, las universidades van preparando los profesores para los cursos más avanzados de la educación media y universitaria. Dicho sencillamente: el proceso educativo es un ciclo continuo de crecimiento intelectual, cada promoción con mayor bagaje cultural que la anterior. Las matemáticas históricamente no se han desarrollado aisladamente, ellas anidan en un nicho cultural donde se nutren, y a su vez, aportan a esa cultura y a esa sociedad y es por eso que la formación de los docentes es tan importante para que la cultura y la sociedad avancen.

De otro lado, la formación del docente debe ir paralela a la transformación curricular de la escuela. Nada hacemos con formar docentes con patrones nuevos que vayan a la escuela a enseñar lo mismo que ellos aprendieron cuando niños. Y desgraciadamente eso es lo que se hace en la generalidad de escuelas y colegios oficiales de hoy. El currículo tiene que ser un elemento vivo, que crece y se transforma en la medida que las nuevas tendencias de la sociedad van apareciendo. Para esto, bueno es reflexionar en torno a las propuestas de Peter Senge en su obra *Escuelas que Aprenden*²⁸. Una educación tradicional retrasa el desarrollo de los pueblos e impide que los países subdesarrollados compitan en pie de igualdad con sus homólogos desarrollados. Las matemáticas, contrariamente a lo que universalmente se piensa, no sólo son números. Sin embargo partiendo de ellos si podemos desplegar múltiples alternativas que nos llevan a conceptos de carácter geométrico, físico, aleatorio, filosófico y hasta mágico.

Considero que la educación matemática debe trazarse el propósito de formar sus bases educativas escalonadamente, de tal modo que, las matemáticas del jardín infantil preparen al niño para la asimilación adecuada de las matemáticas de la escuela primaria y que estas, sirvan de soporte a las que van a enseñarse en el bachillerato, que a su vez, serán suficientes para la educación universitaria. Esto implicaría el reto máximo, hacer que las matemáticas del pregrado universitario sean lo suficientemente sólidas para los estudios de posgrado. Creo que sólo así tendremos una educación matemática que rebase las perspectivas para un futuro feliz en educación.

Finalmente si aspiramos a estar matemáticamente a la par de los países desarrollados en un tiempo razonable, no veo otra forma que buscar un atajo. La desigualdad del triángulo que aprendemos desde la escuela hasta la universidad nos ofrece la metáfora apropiada para este propósito. En lugar de seguirlos por los catetos como tradicionalmente lo hemos venido haciendo tendríamos que seguir el camino de la hipotenusa. Pues si ellos hoy están en un punto B mientras nosotros los seguimos desde un punto A, cuando nosotros lleguemos a B ellos ya estarán adelante en el nivel C. Por lo tanto hay que buscar la hipotenusa que nos lleve desde A directamente al nivel C. Aspiro a que esto lo logremos dando un fuerte timonazo a los lineamientos educativos que la tradición nos ha impuesto.

²⁸ Ver: Senge, P. et al. *Schools that Learn*. Random House, Inc. New York. 2012 . También ver el artículo divulgativo del profesor Jesús Alberto Coca: *Una Aproximación a "La Escuela que Aprende con el Recurso de las Cinco Disciplinas" de Peter Senge*, en: http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/posgrado/APROXIMACION_A_LA_ESCUELA_QUE_APRENDE.Jesus_Alberto.pdf

Estas notas se han escrito y organizado para una serie de charlas a exponer a estudiantes y profesores de matemáticas de la Universidad Nacional de San Antonio Abad, Cusco en la semana previa a la *EMALCA, Cusco*; 20 al 31 de Octubre de 2014. El autor agradece al profesor Guido Álvarez Jáuregui su gentil invitación a este evento.

El Cusco, Perú, Octubre de 2014