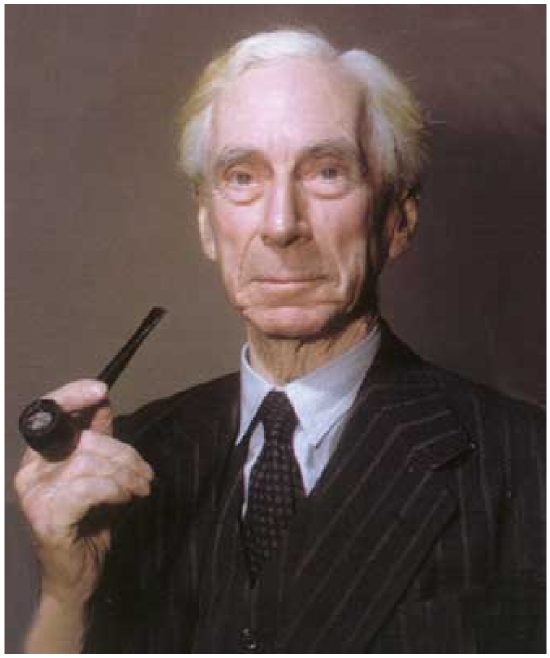
EL LENGUAJE Y LAS MATEMÁTICAS[1]

Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío***



Bertrand Russell (1872-1970) buscó darle a las matemáticas una fundamentación desde el ángulo de la Lógica. Su obra *Principios de las matemáticas* aparece como el primer intento serio de mostrar como las matemáticas pueden considerarse como una parte de la lógica. Obtuvo el Premio Nobel de Literatura y el de la Paz[2].

1. Introducción.

En estas notas se busca describir el telón de fondo sobre el cual se puede dibujar en primer plano la concepción sobre la cual reposa la definición de lenguaje formal, entendido en el contexto de la lógica moderna. Para ello debemos resaltar en perspectiva, el surgimiento de tres escuelas que buscaron sentar sobre bases firmes las matemáticas existentes hasta comienzos del siglo pasado. Puesto que las matemáticas han sido vistas por la generalidad del público como el producto del intelecto, más cercano al concepto de verdad inmanente en sus teorías, vamos a hacer aquí un pequeño estudio retrospectivo de las escuelas que según su prisma filosófico trataron de explicar esas teorías. Empezaremos con una pequeña reseña descriptiva de tres escuelas; primero la logicista, para seguir luego con el estudio sucinto del enfoque intuicionista y terminar con el estudio del lenguaje según los cánones formalistas iniciados por David Hilbert.

El lenguaje con que nos comunicamos y transmitimos información es una característica del ser humano y desde que el hombre se convirtió en ser gregario ha sido clave en la perpetuación de la especie y clave en la creación de una compleja red de interrelaciones en cada sociedad y en el proyecto futuro de la generación de una única sociedad global que preserve las particularidades propias de cada cultura. Un futuro lenguaje universal está en su génesis y con el tiempo, y la

---

[1] Este artículo es una ampliación de una charla para estudiantes de filosofía que se presentó en Agosto de 2008, por gentil invitación del profesor Jairo Urrea Henao.

[2] Foto tomada de Mac Tutor en: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Russell.html .

dinámica impresa por los medios modernos de comunicación, más temprano que tarde cubrirá todo el espectro cultural humano.

Comenzando este siglo apareció un libro divulgativo muy interesante del matemático británico Keith Devlin: *The Math Gene*[3] (El Gen Matemático). Devlin es el director del Centro para el Estudio del Lenguaje y la Comunicación, adscrito a la Universidad de Stanford, en California, Estados Unidos. En esta obra, el autor sustenta la tesis de un origen común del lenguaje y las matemáticas, de lo cual se va a desprender que, el cultivo de la imaginación y la fantasía en lo que tiene que ver con el lenguaje genera paralelamente una predisposición del niño hacia las matemáticas.

Estas notas se han preparado para dar una idea a estudiantes de filosofía de qué terreno se pisa cuando tratamos de hablar de lenguajes formales. Si se quiere llegar directamente a lo que los formalistas entienden por lenguaje se puede ir al final de este artículo en lo atinente a formalización. Esta corta introducción al tema se ha hecho con el recurso de las notas del curso de epistemología de las matemáticas que el autor dirigió en la Universidad del Quindío durante los años 2006-2007.

2. Frege, Russell y el Logicismo.

Los trabajos de Gottlob Frege (1848-1925) de alrededor de 1884 dan inicio a la escuela del logicismo. Empezando el siglo XX Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947) retoman la iniciativa de Frege de mostrar que las matemáticas clásicas, al menos las que se conocían hasta ese tiempo, podían considerarse como parte de la lógica. Para sustentar esta tesis se debía dar respuesta a preguntas como ¿Por qué las matemáticas clásicas están libres de contradicciones?, que origina una pregunta similar en la lógica ¿Por qué la lógica está libre de contradicciones? Desde luego que antes de intentar responder a estas preguntas se debe responder a preguntas más simples como ¿Qué son las matemáticas clásicas?, o ¿Qué entendemos por lógica? Las respuestas que hoy damos a estas preguntas no son, desde luego, las mismas de Frege y Russell, porque el desarrollo de las matemáticas en el siglo XX fue asombroso y el alcance de las mismas posiblemente se aleja demasiado de los presupuestos tenidos en cuenta por los lógicos tradicionales.

Las matemáticas clásicas podemos entenderlas como aquellas a las que se referían Russell y Whitehead en los *Principia* (cuyo primer volumen apareció en 1910) y que tiene como objeto central de estudio, la teoría formal de conjuntos. Aunque la formalización no llegó a completarse, los autores pensaron en utilizar este trabajo como soporte en su programa de reducir las matemáticas a la lógica. Ellos demostraron que todas las matemáticas clásicas podían derivarse de la teoría de conjuntos y así de los axiomas de los *Principia*. Lo que restaba por hacer era, mostrar que todos los axiomas de los *Principia* pertenecen a la lógica. Por razones pedagógicas se puede usar otro sistema formal de teoría de conjuntos, como el de Fraenkel-Zermelo-Skolem (FZS) en lugar del sistema implícito en los Principia, sobretodo porque (FZS) tiene alrededor de una decena de axiomas que son más asequibles y más conocidos que aquellos que aparecen en los *Principia*. Con esto en mente, la meta del logicismo es ahora mostrar que los axiomas (FZS) pertenecen a la lógica. Para entender el logicismo es importante ver claramente qué significaban los logicistas, por lógica. La razón es que, independientemente del significado que le hubiesen atribuido, ciertamente pensaban en algo más que la lógica clásica. Hoy en día, uno puede definir lógica clásica en términos

[3] DEVLIN, K. *The Math Gene. How Mathematical Thinking evolved and why Numbers are like Gossip.* Basic Books. 2000.

de todos *aquellos teoremas, que pueden probarse en lenguajes de primer orden*[4], sin el uso de axiomas no lógicos. Es decir, estamos restringidos a lógica de primer orden y a usar las reglas de deducción[5] y los axiomas de esa lógica. Un ejemplo de estos axiomas es la ley del tercero excluido, la cual dice que, si p es una proposición, entonces la proposición $[p \vee (\neg\, p)]$ es verdadera independientemente del valor de verdad de p. Aquí el símbolo $\vee$ representa el conectivo lógico "o inclusivo" y "$\neg$" es la conectiva correspondiente a la negación.

Si la definición de lógica dada arriba hubiera sido la de los logicistas, no habría duda de que todo el sistema FZS se podría reducir a la lógica. Sin embargo, los logicistas tenían una definición más amplia, Su concepto de proposición lógica tenía una concepción de generalidad y su valor de verdad dependía únicamente de su forma y no de su contenido. Por esta razón la palabra "proposición" se usa como sinónimo de "teorema". Por ejemplo, la ley del tercero excluido es una proposición lógica por su generalidad y porque su valor depende de su forma y no de su contenido, ya que la proposición p puede referirse a matemáticas, física o a lo que uno quiera. Entonces aquí uno se pregunta, ¿por qué este principio se cumple? Los logicistas responden: en virtud de su forma, en el sentido de la sintaxis, o sea por el papel que juegan en la estructura de la proposición, los conectivos $\vee$ y $\neg$, el *o* inclusivo y la negación respectivamente.

De una parte, no faltan argumentos que muestran que todos los teoremas de la lógica clásica, como los definidos antes, son proposiciones lógicas en el sentido del logicismo. De otro lado, no hay una razón *a priori* para creer que no habría proposiciones lógicas fuera de la lógica clásica. Esta es la razón para sostener que la definición de lógica de los logicistas va más allá de la definición clásica de lógica. Es así, como el objetivo del logicismo se ve claro: éste se reduce a mostrar que los axiomas de FZS son proposiciones lógicas en el sentido del logicismo descrito antes. Para ubicarnos en el terreno que estamos pisando daremos, como referencia, algunos axiomas de la teoría de conjuntos FZS[6].

AXIOMAS DE *FRAENKEL* ZERMELO. Aquí presentamos una de las primeras axiomatizaciones de la teoría de conjunto originada en Ernst Zermelo (1871-1953). Esta axiomatización fue completada en 1922 por Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965) y por el lógico noruego Thoralf Skolem (1887-1963). Supongamos que se ha dado un conjunto universal o referente, cuyos elementos son objetos o conjuntos, y algunos entes (preelementos, *urelements*, en inglés) no necesariamente conjuntos, en el seno de los cuales se ha definido relaciones fundamentales del tipo $a \in b$, donde a es elemento y b un conjunto que lo contiene. En este universo se espera que se cumplan los siguientes axiomas.

I. Axioma de Extensionalidad. Si M y N son conjuntos tales que $M \subset N$ y $N \subset M$ (es decir si cada elemento de M es elemento de N y viceversa) entonces M = N. Esto significa que cada conjunto queda determinado por sus elementos.

---

[4] Los lenguajes de primer orden tienen que ver solamente con cuantificación sobre individuos, esto es sobre objetos particulares o con entidades tratadas como entes particulares. Una definición de lenguaje de primer orden aparece al final de estas notas.

[5] Para una descripción de estas reglas de deducción, ver: Caicedo, X. *Elementos de Lógica y Calculabilidad.* Una Empresa Docente. Universidad de los Andes. Bogotá, 1990. Ver también el final de la sección 5.4 de las notas de Epistemología que aparecen en www.matematicasyfilosofiaenelaula.info .

[6] Ver: DAWSON, J. W. Jr. *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel.* A K Peters. Boston. 2nd Ed. 2005. Págs. 116 y sgts.

II. Axioma de los Conjuntos Primitivos. Existe un conjunto (el conjunto vacío) que no posee elementos y un conjunto (conjunto unitario), tal que si a pertenece al dominio, $\{a\}$ tiene como único elemento a a. Si a y b son elementos del dominio existe el conjunto $\{a, b\}$ que contiene únicamente esos dos elementos.

III. Axioma de Separación. Siempre que la función proposicional $F(x)$, esté definida para todos los elementos x de un conjunto M, M posee un subconjunto de elementos x en M tal que $F(x)$ es verdadera.

IV. Axioma del Conjunto Potencia. A cada conjunto M corresponde otro conjunto (su conjunto potencia) cuyos elementos son todos los subconjuntos de M.

V. Axioma de la Unión. A cada conjunto M corresponde un conjunto, (*su unión*) cuyos elementos son todos los elementos de los elementos de M.

VI. Axioma de Elección. Si M es un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos y esos conjuntos son mutuamente disyuntos y no vacíos, entonces, la unión de M incluye, al menos, un subconjunto que tendrá uno y solo un elemento en común con cada elemento de M.

VII. Axioma del Infinito. Hay al menos un conjunto en el dominio que contiene al conjunto vacío como elemento y que contiene $\{a\}$ como uno de sus elementos, siempre que contenga a a mismo, como elemento.

La única forma de comprobar el éxito o el fracaso, en lo que al logro del objetivo del logicismo se refiere es, determinar si los axiomas FZS caen dentro del concepto de proposiciones formuladas por el logicismo. Se puede demostrar que al menos dos de estos axiomas, el axioma del infinito y el axioma de elección, no pueden considerarse como proposiciones lógicas. Por ejemplo el axioma del infinito dice que existen conjuntos infinitos. ¿Por qué podríamos decir que este axioma es verdadero? La razón es que todos estamos familiarizados con conjuntos infinitos, como los naturales y los puntos en el espacio euclídeo. Así aceptamos el axioma sobre la base de nuestra propia experiencia y esto claramente muestra que lo aceptamos en virtud de su contenido y no por su forma sintáctica. En general, cuando un axioma afirma la existencia de objetos con los cuales ya estamos familiarizados en razón a nuestra experiencia diaria, este axioma, no es una proposición lógica en el sentido del logicismo.

Y aquí entonces, aparece la primera crisis de las matemáticas: Basta que dos de los axiomas de la teoría no se puedan acomodar en la estructura de la lógica, para afirmar que el propósito del logicismo de encontrar las bases de las matemáticas en la lógica, no se puede lograr. Sin embargo, el logicismo fue de la mayor importancia para el desarrollo de la lógica matemática moderna. En efecto, a través del logicismo se empezó a hacer lógica matemática en forma seria. Los dos cuantificadores, el universal $\forall$, y el existencial $\exists$, fueron introducidos en la lógica, por Frege; y la influencia de los *Principia* de Russell, ya es parte de la historia de la lógica matemática y de su desarrollo. Es de anotar también, que el logicismo tiene fundamentos filosóficos. Por ejemplo, cuando los logicistas dicen, qué significan ellos por una proposición, usan lenguaje filosófico y no matemático, y así lo hacen porque, el lenguaje filosófico hace de las definiciones, conceptos de más amplio espectro, que lo que pueden hacer las matemáticas.

La filosofía del logicismo, sostienen algunos, se fundamenta en la escuela filosófica llamada “realismo”. En tiempos medievales, la filosofía usó el término realismo para designar la doctrina platónica que sostiene que las entidades abstractas tienen una existencia independiente de la mente humana. Las matemáticas, por supuesto, están llenas de entidades abstractas tales como números, funciones, conjuntos, etc., y de acuerdo a Platón tales entidades existen fuera de nuestra mente. La mente puede descubrirlas, pero no crearlas. Esta doctrina tiene la ventaja de que uno puede, aceptar conceptos tales como, "número" o "conjunto", sin preocuparse en su posible construcción y así ocurre para con las otras entidades abstractas. Resumiendo: el realismo nos permite aceptar muchas más entidades abstractas en matemáticas que las que pueda permitirnos otra filosofía, que nos limitase a aceptar, solamente aquellas entidades que la mente humana pueda construir. Russell fue un realista en ese sentido y aceptó entidades abstractas que existen en matemáticas clásicas, sin cuestionar, si nuestras propias mentes pueden, o no construirlas. Esta es una diferencia fundamental en relación con la concepción filosófica intuicionista, dentro de la cual, las entidades abstractas se admiten, sólo si las mismas son susceptibles de poder construirse por la mente humana.

"El continuo lineal no puede ser agotado por la interpolación de nuevas unidades.
Y no puede por lo tanto ser pensado como una mera colección de unidades.". L. E. J. Brouwer.

L. E. J. Brouwer, en la lente de Paul R. Halmos. La foto es de 1953[7].
Brouwer fue creador del enfoque intuicionista de las matemáticas y del Teorema del
Punto Fijo, que lleva su nombre. Dos buenas razones para figurar en la historia de las matemáticas.

2. – Brouwer, Heyting y el Intuicionismo.

Al igual que el logicismo, el intuicionismo buscaba dar a las matemáticas una fundamentación firme. Mientras que Frege y Russell recurrían a la lógica, los defensores del intuicionismo iban casi en contravía de la lógica. Leopold Kronecker (1823-1891), el precursor del intuicionismo, rechazó de plano y duramente la teoría de Cantor en relación con los cardinales transfinitos. Kronecker fue esencialmente constructivista en el sentido de exigir que los objetos matemáticos fueran creados por

[7] Foto tomada de HALMOS, P. R. *I Have a Photographic Memory.* American Mathematical Society. Providence. 1987.

procesos algorítmicos específicos, y no introducidos en las matemáticas *a priori,* como lo hizo Cantor, a través de las definiciones abstractas de la teoría de conjuntos.

El matemático holandés L. E. J. Brouwer (1881-1966), inició con su tesis de grado en 1908 toda una escuela filosófica relacionada con los fundamentos de las matemáticas. La situación histórica en la que se inició el intuicionismo con Brouwer, era de gran conflicto por cuanto la postura del matemático holandés, fue demasiado radical al oponerse de plano a la concepción de los logicistas y a la escuela formalista, a la cabeza de la cual estaba David Hilbert. Decíamos antes que los logicistas no estaban para cuestionar las matemáticas clásicas, mas bien buscaban simplemente mostrar que éstas formaban parte de la lógica. Los intuicionistas, al contrario pensaban que las matemáticas clásicas estaban plagadas de errores, a tal punto que, las paradojas en la teoría de Cantor eran apenas la punta del iceberg. Alrededor de 1908 las paradojas en la teoría de conjuntos de Cantor ya habían hecho su aparición, y, paradoja al fin de cuentas, significaba contradicción en una teoría que era más intuitiva que axiomática. Para los logicistas, las paradojas eran errores comunes, causados por la inhabilidad de algunos matemáticos, y no exactamente, por falla estructural de las matemáticas. Para Brouwer, sin embargo, la teoría de conjuntos de Cantor fue hecha amañadamente sin ningún enfoque axiomático. Lo que dio origen a las paradojas, que interpretadas como lo que realmente son (contradicciones en la teoría), hacía que las matemáticas estuvieran lejos de ser perfectas y por tanto, había la exigencia de reconstruirlas desde sus mismas bases.

Para los intuicionistas las bases de las matemáticas estaban en la explicación del origen, o la esencia de los números naturales 1, 2, 3,… Para la filosofía intuicionista, todo ser humano tiene una intuición congénita en relación con los números naturales. Esto significa en primer lugar que tenemos una certeza inmediata de lo que significamos con el número “**1**”, y en segundo lugar, que el proceso mental que originó el numero **1** puede repetirse. La repetición de este proceso, induce la creación del número **2**, una nueva repetición y aparece el número **3**. En esta forma, el ser humano puede construir cualquier segmento inicial **1, 2, 3,…, n,** donde **n** es un natural arbitrario. Esta construcción mental de un número natural tras de otro, nunca podría darse, si no tuviéramos dentro de nosotros, una <u>preconcepción del tiempo</u>. Cuando afirmamos **2** va después de **1**, el término “después” tiene una connotación de tiempo, y en ese aspecto Brouwer se adhiere al filósofo Immanuel Kant (1724-1804) para quien la mente humana tiene una apreciación inmediata de la noción de tiempo. Kant usó la palabra “intuición” para “apreciación inmediata”, y *es de allí de donde proviene el término “intuicionismo”.*

Vale la pena observar que la construcción intuicionista de los números naturales, sólo permite la construcción de segmentos de longitud finita con punto inicial, como es el caso de la secuencia **1, 2, 3, … , n**. Este procedimiento no nos permite construir de golpe todo el conjunto **N** de números naturales, tan familiar a las matemáticas clásicas. También es importante notar que, esta construcción es, a la vez, <u>inductiva y efectiva</u>; inductiva en el sentido de que si queremos construir, digamos el número **2**¸ uno tiene que recorrer el proceso mental de construir el número **1** y luego el número **2**. Es decir al número **2** no lo podemos sacar como el mago saca de su sombrero una paloma. El proceso es efectivo (entendido como causa-efecto) en el sentido de que una vez hemos logrado la construcción de un número natural dado, él queda ya como un *constructo* mental completo, listo a convertirse en objeto de estudio. Cuando alguien dice que ha terminado la construcción del número **6**, por ejemplo, su situación es similar a aquella, en la que está el albañil, cuando ha pegado uno a uno hasta el último ladrillo, y dice, “he terminado este muro”.

Según la filosofía intuicionista, las matemáticas podrían definirse como una actividad mental y no como un conjunto de teoremas en el sentido del logicismo. Para el matemático intuicionista, las matemáticas son una actividad que consiste en llevar a cabo, una tras otra aquellas construcciones mentales, que son inductivas y efectivas, entendidas como se entiende, la construcción intuicionista de los números naturales: inductiva y efectiva. El intuicionismo sostiene que los seres humanos son capaces de reconocer si una construcción mental tiene o no estas dos propiedades. Nos referiremos a las construcciones mentales que tienen estas dos propiedades como un "constructo"; y así una definición intuicionista de matemáticas dice: las matemáticas son una actividad mental, que consiste en realizar constructos, uno tras el otro.

Una consecuencia mayor de esta definición es que, todas las matemáticas intuicionistas son efectivas, o, "constructivas", como usualmente se dice. Usaremos de ahora en adelante el adjetivo "constructivo" como sinónimo de "efectivo". Es decir, cada constructo es constructivo, y las matemáticas intuicionistas no serán otra cosa que tratar, uno tras otro, los constructos mentales. Por ejemplo, si un número real r ocurre en una prueba o en un teorema intuicionista, el número nunca estará allí en virtud de una prueba de existencia. Estará allí porque se construyó previamente desde el fondo hasta el tope. Esto implica, por ejemplo, que cada lugar decimal en su expansión decimal puede en principio computarse. Brevemente, todas las pruebas intuicionistas, teoremas, definiciones, etc., son enteramente constructivas.

Otra consecuencia importante de la definición intuicionista de las matemáticas es que las matemáticas no pueden ser reducidas a otra ciencia, como por ejemplo, a la lógica. La concepción de los logicistas de que las matemáticas son parte de la lógica, comporta demasiados procesos mentales para considerar esa reducción posible. En efecto, la actitud intuicionista hacia la lógica es precisamente la opuesta a la actitud del logicista. Para los intuicionistas, los procesos lógicamente válidos se dan, porque ellos son constructos y así, *la parte válida de la lógica clásica es parte de las matemáticas*. Cualquier ley de la lógica clásica no compuesta de constructos es para el intuicionista una combinación de palabras sin sentido. Esto implica que la clásica ley del tercero excluido, no sea más que una combinación de palabras sin significado, y así este principio tan importante en las matemáticas clásicas, no puede usarse indiscriminadamente en matemáticas intuicionistas. De pronto podría usarse con limitaciones, pero no siempre.

Una vez que la definición de matemáticas se ha entendido y aceptado, lo que resta hacer es, construir matemáticas a la manera intuicionista. Así pues, hay aritmética, álgebra, análisis, teoría de conjuntos, desarrolladas, todas ellas, con el enfoque intuicionista. Sin embargo, en cada una de estas ramas de las matemáticas, ocurren teoremas clásicos los que no están compuestos de constructos y, serán para los intuicionistas, meras combinaciones de palabras sin ningún sentido. Consecuentemente, se puede decir, que los intuicionistas no han podido, al menos hasta ahora, reconstruir todo el espectro de las matemáticas clásicas. Pero esto no los molesta, por cuanto que, todo aquello que no se deja tratar, según sus propios patrones, simplemente, no es matemático. No está en el programa intuicionista la justificación de todas las matemáticas clásicas, su propósito es dar una definición válida de las matemáticas y entonces "esperar y mirar" que tipo de matemáticas resulta de esta definición. Observamos aquí otra diferencia de bulto entre el logicismo y el intuicionismo: los logicistas buscaron justificar todas las matemáticas clásicas, mientras los intuicionistas se dedicaron a hacer sus propias matemáticas. Para formarse una idea del alcance de su propósito es bueno dar una ojeada a la obra Heyting[8], donde uno encontrará matemáticas de gran valor. Heyting fue discípulo de Brouwer y otro gran exponente de las matemáticas intuicionistas.

Arend Heyting estudió en la Universidad de Ámsterdam bajo la dirección de Brouwer y obtuvo su doctorado en 1925, con una tesis sobre la axiomatización intuicionista de la geometría proyectiva. En 1930 publicó una obra relacionada con la formalización de las teorías intuicionistas de Brouwer, obra ésta que no solo hizo de Heyting un personaje destacado de la filosofía intuicionista, sino que además, las teorías de su maestro llegaron a ser más asequibles. Recordemos aquí a Heyting en el Simposio de Königsberg, el 7 de Septiembre de 1930, defendiendo sus teorías intuicionistas, frente a Rudolph Carnap (1891-1970) y a John von Neumann (1903-1957), quienes harían lo propio, representando al logicismo y al formalismo, respectivamente.

En 1934 apareció su libro *Intuicionismo y Teoría de la Prueba* en el cual a la manera de Hilbert busca sustentar la lógica intuicionista en el plano de las metamatemáticas. A partir de 1937 fue profesor de la Universidad de Ámsterdam hasta su retiro en 1968. A lo largo de su carrera profesional escribió artículos y libros que divulgaban y sustentaban sus principios intuicionistas en diferentes terrenos, desde el álgebra hasta en los espacios de Hilbert. Aun puede conseguirse copias de su obra clásica: *Intuitionism: An Introduction* (Primera edición, 1956).

Examinemos ahora, qué tan exitosa ha sido la labor de la escuela intuicionista en el sentido de dar una fundamentación aceptable a las matemáticas, y que sea reconocida por la mayoría de los matemáticos. Insistimos de nuevo que hay honda diferencia en la forma en que esta pregunta se responde en el caso presente y en el caso de los logicistas. Aún los más connotados líderes del logicismo han admitido que su escuela ha fallado en el propósito de dar a todas las matemáticas clásicas una fundamentación firme. Sin embargo, los más destacados líderes de la escuela intuicionista se sostienen en la posición de que su escuela ha dado a sus matemáticas una fundamentación enteramente satisfactoria. Hay que poner de presente la definición de matemáticas que dimos arriba, y la definición de filosofía intuicionista, que nos dice por qué, los constructos nunca pueden dar origen a contradicciones y así, las matemáticas intuicionistas están libres de contradicciones. En efecto, no sólo eso, si no también todos los demás problemas concernientes a la naturaleza de los fundamentos, han recibido soluciones perfectamente satisfactorias dentro del intuicionismo. Pero, aunque reconozcamos las atractivas características del intuicionismo ya mencionadas, ¿ha avalado la comunidad matemática esta posición intuicionista? Aún, si uno mira al intuicionismo desde fuera, o sea, en la perspectiva de un matemático clásico, uno tiene que decir que el intuicionismo ha fallado en el logro del objetivo de dar a las matemáticas una fundamentación adecuada.

Una razón para ello es que los matemáticos clásicos no están dispuestos a alejarse de muchos de los hermosos problemas y teoremas que, para los intuicionistas no son más que combinación de palabras sin sentido. Un ejemplo de los primeros es, la *Hipótesis del Continuo,* que David Hilbert puso a encabezar entre sus veintitrés problemas propuestos en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, celebrado en París[9]. Un ejemplo de los segundo ocurre en topología y análisis matemático, y es el *teorema del punto fijo de Brouwer*, el cual es rechazado por los mismos intuicionistas, porque el punto fijo no puede construirse y sólo puede mostrarse la existencia del punto fijo a través del recurso de una prueba existencial y no constructivista. Este teorema,

[8] HEYTING, A. *Intuitionism. An introduction,* Elsevier, Amsterdam. 1966

[9] Para verificar la forma califica el mismo Brouwer este problema ver su discurso inaugural como profesor de la Universidad de Ámsterdam de 1912: *Intuisionism and Formalism.* Bulletin of The American Mathematical Society. Vol. 20. 1913. Págs. 81-96.

irónicamente, lo formuló y demostró el mismo Brouwer en su época preintuicionista cuando lideró el desarrollo de la topología, sin embargo, fue rechazado por él y su escuela, al reconocer que no podía acomodarse, en las matemáticas intuicionistas. Una versión de este teorema para funciones continuas de variable y valor real dice:

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.
Toda función continua de un intervalo cerrado [*a, b*] *en si mismo, tiene al menos, un punto fijo. Esto es, existe un punto* $x_0 \in [a, b]$, *tal que* $f(x_0) = x_0$. Ver *Fig.* 1.

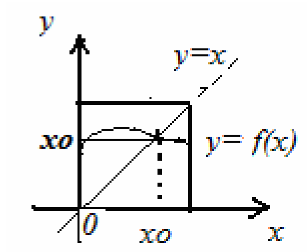


Fig. 1. Toda función continua definida en un intervalo cerrado [a, b] con rango en el mismo intervalo tiene un punto fijo, es decir, existe un punto $x_0 \in$ [a, b], tal que, $f(x_0) = x_0$.

Otra razón para el rechazo del intuicionismo, se origina en teoremas que pueden probarse tanto en matemáticas clásicas como en matemáticas con enfoque intuicionista. Con frecuencia ocurre que estos teoremas tienen pruebas cortas, elegantes e increíblemente recursivas en matemáticas clásicas, pero son, no constructivas. Los intuicionistas desde luego las rechazan y las sustituyen a su modo por pruebas constructivas. Sin embargo, estas pruebas constructivas se convierten en pruebas mucho más largas, y en su apariencia, al menos para los matemáticos clásicos, han perdido toda su elegancia. Un ejemplo es el teorema fundamental del álgebra[10], cuya prueba en matemáticas clásicas se hace en media página, pero la misma demostración en matemáticas intuicionistas es diez veces más larga. Los matemáticos clásicos se resisten a creer que las elegantes pruebas de sus teoremas no tengan sentido, sólo por ser no constructivas.

Finalmente están los teoremas que valen en el intuicionismo y son falsos en las matemáticas clásicas. Un ejemplo es el teorema intuicionista que afirma que: *Toda función de valor real definida en todo* ***R*** *es continua*. Este teorema no es tan traído de los cabellos, como aparenta ser, cuando se tiene en cuenta la forma cómo se define, en el terreno intuicionista, una función. Para ellos una función de valor real en todo **R** se define, sólo si, para cada real *r* cuya construcción intuicionista se ha completado, también el número *f*(*r*) puede ser construido. Para un matemático clásico, las funciones continuas no satisfacen ese criterio, las funciones discontinuas, menos. De aquí que, matemáticas que reconozcan este enunciado como teorema, no pueden ser aceptadas como tales, entre los matemáticos clásicos.

Las anteriores razones que usan los matemáticos clásicos para rechazar el intuicionismo no son, ni racionales, ni científicas. Tampoco son razones pragmáticas, basadas en la convicción de que las matemáticas clásicas son mejores, para las aplicaciones en la física o en otras ramas de la ciencia, donde no han entrado las matemáticas intuicionistas. Todas ellas son, esencialmente, razones

[10] El teorema fundamental del álgebra tiene que ver con la existencia de raíces de una ecuación polinómica. Más exactamente, el polinomio *P* con coeficientes reales y de grado *n*, tiene exactamente *n* ceros, es decir hay *n* valores de *x* (contando multiplicidades) para los cuales $P(x) = 0$.

emotivas, arraigadas en sentimientos profundos de apego a las matemáticas en las que tradicionalmente nos hemos desenvuelto. Aquí enfrentamos entonces la segunda crisis de las matemáticas, que consiste en la falla de la escuela intuicionista de convencer a la mayoría de la comunidad matemática para que siga sus lineamientos.

Es importante anotar que, al igual que el logicismo, el intuicionismo también tiene sus raíces en la filosofía. Cuando por ejemplo, los intuicionistas establecen su definición de matemáticas, ellos usan estrictamente lenguaje filosófico y no matemático. La actividad mental que conduce a las matemáticas, puede definirse en términos filosóficos, pero debe, por necesidad, usar términos que no pertenecen a la actividad que pretende definir. Al igual que el logicismo está ligado al realismo filosófico, el intuicionismo está emparentado con una escuela filosófica a veces denominada: "*conceptualismo*". Esta escuela sostiene que las entidades abstractas existen, solamente en la medida, en que ellas sean construidas por la mente humana. Esta es, en verdad, la actitud de los intuicionistas, para quienes las entidades abstractas que ocurren en matemáticas, ya sean sucesiones, relaciones de orden, o lo que se use, son construcciones mentales. Además, esta es, precisamente la razón, por qué, uno no encuentra en el intuicionismo la gran variedad de entidades abstractas que encuentra en las matemáticas clásicas y por consiguiente en el logicismo. El contraste entre logicismo e intuicionismo en las matemáticas, es muy similar entonces, al que existe entre *realismo y conceptualismo.*

No dejemos pasar la oportunidad, ahora que estamos hablando de intuicionismo, para traer a cuento al matemático ruso Andrei N. Kolmogórov (1903-1987), quien mantuvo correspondencia con Heyting en relación con el intuicionismo. Al matemático ruso lo recordaremos, no sólo por sus grandes contribuciones al análisis matemático, a las ecuaciones diferenciales y a otros campos de las matemáticas y de la física, sino también por la formalización que hizo de la teoría de probabilidades, usando lógica y teoría de medida.

Buena parte de esta sección es la traducción y adaptación de un artículo de Snapper[11], que tiene el mérito de haber sido premiado por la *Mathematical Association of America* (MAA) con la distinción *Carl B. Allendoerfer Award* al mejor artículo expositivo del año 1980 en el *Mathematics Magazine*.

[11] Snapper, Ernst. The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism, and Formalism, *Math. Mag.* 52 (1979), 207-216.

Arend Heyting (1898-1980), fue discípulo de Brouwer y fue quien además, formalizó las teorías intuicionista de su maestro en relación con las matemáticas.[12]

"*Wir müssen wissen, wir werden wissen*
(Debemos conocer, y conoceremos)". D. Hilbert.

David Hilbert es el matemático más referenciado en los últimos tiempos. Además de sus amplias contribuciones a las matemáticas y a la física, su posición filosófica dio origen a toda una escuela de pensamiento, hoy conocida como formalismo. Esta foto es de 1900[13], cuando pronunció su famoso discurso en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París, en el que propone 23 problemas matemáticos que pasarían a la historia.

4. – David Hilbert y el formalismo.

Cuando David Hilbert (1862-1943) entró al tema de los fundamentos de las matemáticas alrededor de 1910, su obra relacionada con el tema de formalización ya era bien conocida, como veíamos en las primeras exposiciones relacionadas con la formalización de la geometría y de la teoría de números. El nombre de David Hilbert lo escuchamos mucho y lo seguiremos escuchando en ambientes matemáticos cultos, porque aparte de sus monumentales contribuciones a las matemáticas, también mantuvo una poderosa influencia en los círculos académicos de Europa, al liderar toda una escuela matemática centrada en la Universidad de Gotinga, Alemania[14].

Aunque a fines del siglo XIX ya existía una corriente formalista a la que Frege controvertía en el segundo volumen de su obra *Grundgesetze der Arithmetik* de 1903, sin embargo, el concepto moderno de formalismo que incluye las técnicas del razonamiento finitista debemos atribuirlo a Hilbert y a sus discípulos. Actualmente la mayor parte de los textos de lógica moderna están relacionados con el formalismo. Esto hace que este enfoque sea más conocido que sus contrapartes logicista e intuicionista. Para entender el contexto donde se desarrolla el formalismo, tratemos de dar respuesta a una serie de preguntas relacionadas con los procedimientos involucrados en el proceso de formalizar una determinada teoría.

Primera pregunta: *¿Qué es aquello que se formaliza, cuando de formalizar se trata*?

[12] Foto tomada de Mac Tutor: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Heyting.html.
[13] Foto tomada de Internet en: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hilbert.html
[14] Para una descripción general de esta escuela y sus protagonistas ver mi artículo "David Hilbert y su Escuela", en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/David%20Hilbert%20y%20su%20Escuela.%20matematica_ense_anza_1978.doc

La respuesta es: formalizamos aquellas teorías que previamente han sido axiomatizadas. Debemos hacer claridad entonces, sobre la diferencia entre la axiomatización y la formalización. Euclides axiomatizó la geometría alrededor del año 300 AC, pero la formalización empezó 2200 años después, con los logicistas y los formalistas de fines del siglo XIX. Ejemplos de teorías axiomatizadas son: la geometría plana con los axiomas de Euclides, la aritmética (teoría de números) con los axiomas de Peano, la teoría de conjuntos con los axiomas de Fraenkel, Zermelo y Skolem, la teoría de probabilidades con los axiomas de Kolmogórov, etc.

Segunda pregunta: *¿Cómo formalizamos una teoría axiomatizada*?
Supongamos que se nos da una teoría axiomatizada T. Restringiéndonos sólo a lógica de primer orden, *formalizar* T significa, escoger un **lenguaje** *L* apropiado de primer orden para T. El vocabulario para un lenguaje de primer orden consiste de cinco componentes, llamémoslos aquí, términos; los primeros cuatro de ellos son siempre los mismos y no dependen de la teoría T. Estos términos son:

1) *UNA LISTA ENUMERABLE DE VARIABLES.* Su número puede ser infinito, pero de cardinal igual a $\aleph_o$, el cardinal de los números naturales.

2) *LOS SÍMBOLOS PARA LAS CONECTIVAS*: ($\neg$) para la negación, ($\wedge$) para la conjunción, ($\vee$) para la disyunción (o inclusivo), ($\rightarrow$) para la implicación y ($\leftrightarrow$) para la equivalencia o doble implicación. Estas conectivas son realmente las mismas de nuestro lenguaje usual.

3) *EL SIGNO* (=) *PARA LA IGUALDAD*, imprescindible en la notación matemática.

4) *LOS CUANTIFICADORES*: ($\forall$) universal y ($\exists$) el existencial.

5) *TÉRMINOS INDEFINIDOS* (o *PARÁMETROS*). Como hemos supuesto que T es una teoría axiomatizada, T trae implícitos ciertos "términos indefinidos" o a veces también denominados "elementos primitivos"; a los que usualmente les asignamos sus respectivos símbolos. Estos símbolos, uno por cada término indefinido de la teoría axiomatizada T, usualmente se denominan *parámetros* del lenguaje de primer orden *L*. Este conjunto de símbolos corresponde al quinto término del vocabulario de nuestro lenguaje *L* para la teoría T. Por ejemplo, entre los términos indefinidos de la geometría plana de Euclides, aparece *punto, recta, interestancia, incidencia,* etc. y para cada uno de ellos usamos símbolos apropiados para completar el vocabulario del lenguaje de primer orden *L*.

OTROS EJEMPLOS. Entre los términos indefinidos de la aritmética, en la axiomatización de Peano, aparece *cero, suma* y *multiplicación*, y para ellos uno escoge como sus símbolos, 0, + y $\times$ respectivamente. La teoría de conjuntos más fácil de formalizar es, la de Fraenkel-Zermelo (FZ), por cuanto que esta teoría, no tiene sino un solo término indefinido, esto es, la relación de pertenencia que simbolizamos como "$\in$".

Puesto que los parámetros son los únicos símbolos en el vocabulario de un lenguaje de primer orden que dependen de la teoría previamente axiomatizada T, uno formaliza T simplemente escogiendo estos parámetros. Una vez hecha esta escogencia, la totalidad de la teoría T queda completamente formalizada. Uno puede ahora expresar en el lenguaje de primer orden resultante *L*, no sólo los axiomas, definiciones y teoremas de T, si no mucho más. Uno puede expresar en el lenguaje *L*, todos los axiomas de la lógica clásica y desde luego, también toda la argumentación que uno usa en la prueba de los teoremas de la teoría T. Resumiendo, uno puede ahora proseguir enteramente con *L*; es decir, "formalmente".

Tercera pregunta: *¿Por qué universalmente se busca formalizar una teoría axiomatizada*? En el caso de Euclides, por ejemplo, no parece necesario formalizar su geometría ya axiomatizada. La importancia de esta pregunta radica en que, ocurren situaciones a veces, donde se hace mala interpretación, del propósito real de la formalización. Este fue el caso de Geuseppe Peano (1858-1932) que usó lenguaje formal (muy cercano a un lenguaje de primer orden) en la publicación de uno de sus más importantes artículos sobre ecuaciones diferenciales, donde se notan errores en el propósito de la formalización. Su artículo[15] era ilegible, hasta que alguien le hizo el favor de traducirlo al alemán, un lenguaje corriente a través del cual, se pudo valorar la importancia del tema en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Tratemos de dar respuesta a la tercera pregunta. Supongamos que un matemático investiga cierta rama de las matemáticas, digamos por ejemplo, geometría euclidiana. Su interés estará centrado en descubrir y probar importantes teoremas geométricos. Para esa clase de trabajo técnico, la formalización, no sirve de ayuda, y más grave aún, estorba o entorpece la labor del investigador. Sin embargo, si uno hace preguntas sobre los fundamentos de la geometría; como: "¿Por qué esta rama de las matemáticas está libre de contradicciones?", entonces la formalización, no sólo es de gran ayuda, sino de una necesidad absoluta.

Fue necesario el golpe de genio de Hilbert para entender que la formalización era el camino a seguir para responder las preguntas que surgen en torno a los fundamentos de las matemáticas. Lo que él nos enseñó puede sintetizarse en lo siguiente. Supongamos que T es una teoría axiomatizada, formalizada en términos de un lenguaje de primer orden L. Este lenguaje tiene una sintaxis precisa susceptible de estudiarse a su vez como un objeto matemático. Por ejemplo, uno pregunta: "¿Se puede desembocar en una contradicción si se procede formalmente en L, usando sólo los axiomas de T y los correspondientes de la lógica, previamente expresados en L?". Si se logra probar matemáticamente que la respuesta es no, quedaría demostrado matemáticamente que la teoría T está libre de contradicciones.

En esto consistía básicamente el famoso "Programa de Hilbert". La idea era formalizar las diferentes ramas de las matemáticas y entonces probar matemáticamente que, cada una de ellas, así formalizada, estaba libre de contradicciones. En efecto, si por medio de esta técnica, los formalistas hubieran podido mostrar que la teoría de conjuntos ZF carecía de contradicciones, ellos habrían logrado el objetivo de probar que todas las ramas de las matemáticas clásicas también estarían libres de contradicciones, puesto que las matemáticas clásicas pueden deducirse de los axiomas ZF. Resumiendo: los formalistas trataron de crear técnicas matemáticas mediante las cuales probar que las matemáticas estaban libres de contradicciones. Este fue el propósito inicial del formalismo. Hay que destacar que, tanto formalistas como logicistas, formalizaron las diversas ramas de las matemáticas, pero por razones de distinta índole. Los logicistas buscaban esa formalización para mostrar que la rama de las matemáticas en cuestión pertenecía a la lógica; los formalistas, por su parte, hicieron lo propio para probar que esa rama específica de las matemáticas estaba libre de contradicciones. Entendidas así las dos escuelas (formalizadas), aparentemente, una se confunde con la otra.

---

[15] El teorema de Peano hacía referencia a la existencia de soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, donde f es una función continua.

Cuarta Pregunta: *¿Lograron los formalistas llevar su programa a feliz término*? La respuesta infortunadamente es no. En 1931, Kurt Gödel mostró que la formalización no puede considerarse como una técnica matemática, a través de la cual pueda uno probar que las matemáticas están exentas de contradicciones. El teorema en aquel artículo, que prendió las alarmas en el programa de Hilbert es extensivo a teorías axiomatizadas que estén exentas de contradicciones y cuyos axiomas sean lo suficientemente fuertes como para hacer aritmética en términos de ellos. Teorías que satisfacen este requisito son por ejemplo, la aritmética de Peano y la teoría de conjuntos ZF.
Supongamos que T es tal teoría y que T se ha formalizado por medio de un lenguaje de primer orden L. Entonces el teorema de Gödel dice en términos no técnicos: "***Ninguna proposición en L, que pueda interpretarse como aseveración de que T está libre de contradicciones, puede probarse formalmente en el mismo lenguaje L***".

Aunque la interpretación de este teorema se presta a controversias, la mayoría de matemáticos ha concluido a partir de él, que el programa de Hilbert no puede llevarse a cabo. Dicho en otras palabras, las matemáticas no están en capacidad de demostrarse a si mismas que están libres de contradicciones. He aquí entonces, la tercera crisis de los fundamentos de las matemáticas. No obstante ser el teorema de Gödel un duro revés para el programa de Hilbert, el formalismo no ha perdido, ni su vigencia, ni su importancia, como puede verse en las matemáticas contemporáneas, donde, en el marco formalista se ha desarrollado la lógica matemática moderna incluyendo ramas tan importantes como la teoría de modelos, la teoría de funciones recursivas, etc.

La *Escuela Bourbaki*, establecida en los años treintas del siglo XX por matemáticos egresados de la Escuela Normal Superior de París, acogería el formalismo como marco para el desarrollo de sus matemáticas. Su formalización de la teoría de conjuntos es similar a lo establecido por Zermelo-Fraenkel. A la Escuela Bourbaki hay que recordarla, al menos, por la introducción del símbolo $\varnothing$ para denotar el conjunto vacío. Este símbolo corresponde a una de las vocales del alfabeto noruego, tomado, posiblemente, en honor del matemático Thoralf Skolem (1887-1963), nativo de ese país y que contribuyó a la axiomatización de esta teoría. El símbolo fue escogido por André Weil, como lo manifiesta en una de sus obras[16].

El formalismo, el logicismo y el intuicionismo, tienen su fundamento en la filosofía, pero las raíces filosóficas del formalismo no son tan visibles como lo son en los casos de sus contrapartes, el logicismo y el intuicionismo. Desde luego que uno puede encontrarlas, pero reflexionando más fino en torno al programa de Hilbert.

Sea de nuevo T una teoría axiomatizada, formalizada en términos de un lenguaje de primer orden *L*. Para llevar a cabo el programa de Hilbert, se debe hablar sobre el lenguaje *L* como un objeto de estudio, y mientras se hace esto, uno no está hablando en la seguridad de ese mismo lenguaje *L*. Al contrario, uno está hablando acerca de *L* en lenguaje ordinario, digamos en nuestro caso, en español corriente. Mientras usemos nuestro lenguaje corriente y no lenguaje formal *L*, hay, desde luego, peligro de contradicciones, por cuanto, pueden eventualmente deslizarse errores. Hilbert decía que la forma de evitar el peligro que estos errores se introduzcan, era teniendo la certeza que, mientras uno habla en su lenguaje natural, acerca de *L*, sólo se usen razonamientos absolutamente seguros y libres de cualquier clase de sospecha. El llama a éstos: *razonamientos finitistas*, pero desde luego dando previamente una definición de este concepto. La definición más conocida es la del matemático francés Jacques Herbrand (1908-1931). Tomemos un receso para referirnos cortamente

[16] WEIL, A. *The Apprenticeship of a Mathematician*. Birkhäuser Verlag. Basilea, Boston, Berlin. 1992. Pág. 114.

a la brevísima vida de Herbrand (sólo veintitrés años) un matemático, digno émulo de su coterráneo, el genial Evariste Galois (1811-1832).

Jacques Herbrand estudió en la Escuela Normal Superior de París y a la edad de veintiún años ya tenía en su haber el título de doctor. Al tiempo de su muerte era estudiante en Gotinga bajo la dirección de la gran matemática alemana y alumna de Hilbert, Emmy Noether. Herbrand introdujo el concepto de funciones recursivas en su tesis de doctorado sobre *teoría de la prueba*, un tema muy arraigado en el gusto de Hilbert. Contribuyó al programa de Hilbert en lo atinente con los fundamentos de las matemáticas, al presentar una prueba constructiva de consistencia para un sistema débil de la aritmética. La prueba hace uso del hoy llamado teorema de Herbrand en teoría de la prueba, teorema probado por él en su tesis de grado. En Berlín fue estudiante de John von Neumann y en Hamburgo, de Emil Artin, ambos, matemáticos de gran figuración. Al tiempo de su muerte trabajaba con Emmy Noether en teoría de anillos de clase. En 1931 envió a publicación su artículo "Sobre la consistencia de la Aritmética". Ese mismo año apareció el trabajo de Gödel "Sobre la indecibilidad formal de proposiciones en *Principia Mathematica y sistemas relacionados I*", que anunciaba la prueba de la imposibilidad de formular, dentro de una teoría, una prueba de su propia consistencia. Herbrand alcanzó a estudiar el trabajo de Gödel, y escribió un apéndice a su artículo en proceso de publicación, donde mostraba que las conclusiones del matemático austriaco, no afectaban su artículo "Sobre la consistencia de la Aritmética". Este artículo fue publicado póstumamente. Su muerte se produjo en un accidente mientras escalaba en los Alpes franceses.

Los razonamientos finitistas. La definición de razonamiento finitista con los ajustes que resultan del cambio de "intuicionista" por "finitista", quedaría así:

Un argumento finitista es aquel argumento que satisface las condiciones siguientes:

1) En él, nunca consideraremos nada distinto a un número finito de objetos y de funciones: estas funciones estarán bien definidas en el sentido de que sus valores sean calculados en forma unívoca.
2) Nunca exhibiremos un objeto sin antes dar un procedimiento para construirlo.
3) Nunca consideraremos la totalidad de objetos *x* de una colección infinita.
4) Cuando digamos que un argumento (o un teorema) es verdadero para todos los objetos *x* de una colección finita, estamos significando que para cada *x* tomado separadamente, es posible repetir el argumento general en cuestión, que a su vez debe considerarse meramente como el prototipo de estos argumentos particulares.

Es fácil observar que esta definición usa lenguaje filosófico, y no matemático. Aún así, nadie puede afirmar que entiende el programa de Hilbert sin asimilar, la conceptualización de razonamiento finitista.

Las raíces filosóficas del formalismo salen a la luz cuando, los formalistas definen qué es lo que ellos significan al referirse a un razonamiento finitista.

Hemos asociado logicismo con realismo e intuicionismo con conceptualismo. La corriente filosófica más próxima al formalismo vendría a ser el *nominalismo*. Esta corriente sostiene que las entidades abstractas no tienen existencia de ninguna especie, ni fuera de la mente humana, como sostiene el realismo, ni como construcciones de la mente humana, según la apreciación del conceptualismo. Para el nominalismo, las entidades abstractas son meras exclamaciones vocales o líneas escritas, sólo son nombres. De allí, el término nominalismo, del latín *nominalis* que significa "perteneciente a un nombre".

Similarmente, cuando los formalistas tratan de probar que cierta teoría axiomatizada T está libre de contradicciones, no estudian las entidades abstractas que ocurren en T, si no, mas bien, el lenguaje de primer orden *L,* el cual se usa para formalizar T. Esto es, estudian cómo se forman las frases en *L* a través del uso apropiado de su vocabulario; cómo ciertas frases, o mejor, sentencias como se dice en el argot de la lógica, pueden probarse con el uso apropiado de aquellas sentencias de *L*, que fueron rotuladas como axiomas; y, en particular, tratan de mostrar que, ninguna sentencia de *L* puede ser probada y disprobada al mismo tiempo, puesto que por medio de ellas se habría establecido que la teoría original estaría, o no, libre de contradicciones. El punto importante es que el estudio total de *L,* es un estudio estrictamente sintáctico, ya que ninguna entidad abstracta o un significado se ha asociado con las sentencias de *L*.

El lenguaje se investiga considerando las sentencias o frases de *L* como expresiones sin significado, que se manipulan según reglas sintácticas explicitas, justamente como se manipulan las piezas del ajedrez, que son figuras sin significado que se mueven de acuerdo a las reglas fijas del juego. Para el formalista estricto, *hacer matemáticas* es *manipular símbolos sin significado de un lenguaje de primer orden, según reglas sintácticas explicitas*. Por lo tanto, el formalista estricto no trabaja con entidades abstractas, tales como series infinitas o cardinales, sino solamente con sus nombres carentes de significado que son las expresiones apropiadas en el lenguaje de primer orden. Tanto formalistas como nominalistas evitan el uso directo de entidades abstractas, y es en virtud de esta postura que se hace la comparación del formalismo con el nominalismo.

El hecho de resaltar la comparación del logicismo, intuicionismo y formalismo con el realismo, el conceptualismo y el nominalismo, respectivamente lo hizo el filósofo norteamericano Willard van Orman Quine (1908-2000)[17].

Willard Quine fue un filósofo norteamericano discípulo de Alfred N. Whitehead y uno de los grandes filósofos y pensadores del siglo XX. La Academia de Ciencias de Suecia lo exaltó con el Premio *Rolf Schock* de Lógica y Filosofía.

Jacques Herbrand (1908-1931), fue un ser fuera de lo común, de capacidades intelectuales extraordinarias y al igual que Évariste Galois, con una vida corta pero muy productiva. Se graduó con una tesis en lógica, en la Escuela Normal Superior de París, escuela famosa, por las celebridades matemáticas que allí se formaron.

[17] BENACERRAF, P. et al. *Philosophy of Mathematics*. Prentice Hall, New York. 1964.