El Poder del Dos

Una alternativa para la enseñanza de las matemáticas a través de la intuición

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío. Armenia. Colombia*
E-mail: depehache@yahoo.es

1 – Introducción. Veíamos recientemente un programa en la TV con el nombre "**El poder del 10**". Allí se ponía de manifiesto la rapidez con que se aumenta un premio al multiplicarlo por diez. Más específicamente se pasaba de un premio de cien mil pesos a otro de mil millones de pesos, en sólo cuatro pasos. Desde luego que para llegar a la cifra límite había que arriesgar cien millones, y contar con una suerte nada común, pues se debía acertar, uno entre diez, lo que no es nada equitativo cuando por un incremento estimado de diez veces la apuesta, se está arriesgando 100.000.000. Hasta donde supe nadie se ganó el premio gordo de los $1.000.000.000.

Así como se puede hablar del poder del diez se puede hablar del poder de los números naturales. Arquímedes el gran matemático griego del siglo III AC mostró que no importa que tan pequeño sea un número positivo x y que tan grande sea otro número Y, siempre existirá un número natural n tal que, el producto de *n por x será mayor que Y*, o simbólicamente, $nx > Y$. Esto dignifica que, siempre es posible sobrepasar cualquier cantidad, por grande que sea, partiendo de un número, no importa lo pequeño que sea. En este principio se fundamentan muchos adagios, entre ellos, el aforismo chino: "Un viaje de mil millas empieza con un paso". Aquí entonces podemos hablar del poder de los números naturales que permiten, por medio de la multiplicación, hacer crecer mucho, aun, a los números muy pequeños. Esta característica de los números reales ordinarios, se conoce como *propiedad arquimediana*, en memoria de Arquímedes, el famoso matemático griego del siglo III AC.

Por los años sesentas del siglo pasado Abraham Robinson[1], usando teoría de modelos, presentó otra forma de ver los números reales, donde la propiedad arquimediana no se cumple. En este modelo aparece el conjunto de los *números hiperreales* – que contiene números infinitamente pequeños e infinitamente grandes – que no satisface la mencionada propiedad. En los números hiperreales se puede hacer análisis matemático (*Análisis no estándar*) dando cabida a los números infinitesimales introducidos por Newton y Leibniz en el siglo XVII. Los infinitesimales han sido criticados por filósofos y por muchos matemáticos de la corriente de Karl Weierstrass, pero defendidos por los ingenieros y los llamados matemáticos aplicados.

En apariencia el número 2 es pequeño, pero cuando se repite como factor reiterativamente el producto crece a cantidades astronómicas como puede notarse en la siguiente situación. Una vieja historia árabe, cuenta que el rey que recibió como obsequio el juego del ajedrez, se entusiasmó tanto con él, que llegó hasta el extremo de prometer al inventor, satisfacerle cualquier deseo. El ajedrez, como se sabe, se juega en un tablero de sesenta y cuatro escaques, treinta y dos negros y treinta y dos blancos. Ante el ofrecimiento del rey, el inventor le expuso el siguiente deseo: que por el primer cuadrito del tablero, le diera un grano de trigo, por el segundo dos granos, por el tercero cuatro granos y así sucesivamente hasta llegar al escaque sesenta y cuatro. El rey

[1] Para una reseña de la obra de Abraham Robinson visitar:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Robinson.html

sorprendido por la modesta petición, dio la orden de entregar al inventor, la cantidad de trigo por él solicitada. Los matemáticos del reino se pusieron a hacer los cálculos de cuantas toneladas de trigo había que entregar, y descubrieron que, ni juntando el trigo de todos los graneros del reino podían satisfacer el pedido del inventor de marras. La petición del inventor alcanzaba la cifra de $2^{65} - 1$ granos de trigo, que con algunos redondeos daría un total aproximado de 32.000.000.000.000.000.000 de granos, cifra que en palabras corresponde a: treinta y dos millones de billones. Todo el trigo que se produce actualmente en el mundo, posiblemente sería insuficiente, para satisfacer el modesto pedido del mítico inventor.

La motivación para escribir este artículo se originó en la lectura de una obra reciente de Richard Kaye[2], que se inicia con aplicaciones del Lema de König relativo a árboles binarios. Las aplicaciones de este lema están en varias partes de las matemáticas, incluyendo análisis, teoría de grafos, topología y lógica. El lema de König, en términos no técnicos, afirma que todo árbol binario infinito tiene un ramal infinito.

2 – La aritmética del dos.

Las matemáticas, y en general, las ciencias de origen chino, son vistas por nuestra cultura occidental como algo exótico. Uno aprende en el colegio que la pólvora, la brújula, el papel e inclusive la imprenta se iniciaron en el seno de la cultura china, pero poco sabemos de las contribuciones de esa cultura milenaria a las matemáticas. Aquí sólo tocaremos un tema de la filosofía china del taoismo que desarrolló Gottfried Leibniz alrededor de 1670, inspirado en la lectura del I Ching, el clásico libro de las mutaciones. El taoismo tiene su fundamento en la combinación y transmutación de los opuestos. Al hacer el estudio de los exagramas – las figuras básicas del libro – Leibniz desembocó en un sistema numérico no conocido hasta esa época en Europa, el sistema binario, que tiene su representación en los dígitos uno y cero. Esto es particularmente interesante para la filosofía, por cuanto que, en base a dos categorías puede derivarse una gran variedad de categorías adicionales. Tomando, por ejemplo en el plano físico, blanco y negro, uno puede encontrar, una amplia gama de tonalidades grises; en lo cotidiano, al mezclar el café con la leche, según las proporciones, encontramos toda una variedad de tonos castaños. La filosofía taoista se fundamenta en la acción de los opuestos, *ying – yang*: blanco – negro, arriba – abajo, adelante – atrás, bien – mal, claro – oscuro, duro – blando, continuo – discontinuo (discreto), encendido – apagado (on – off), etc. En matemáticas es frecuente encontrarse con este tipo de contrarios, como es el caso a nivel de procesos inversos entre ellos: suma y resta, multiplicación y división, exponenciación y logaritmación, integración y derivación.

Aunque antes del siglo XVIII ya se había hecho alusión a un sistema binario, no fue sino hasta Leibniz que la idea de un sistema tal, apareció en imprenta y se concretó en un trabajo publicado por él en 1705 y titulado *Explication de L´Arithmétique Binaire.* El siguiente facsímil es tomado de esta obra; allí aparecen ejemplos de las cuatro operaciones en sistema binario y sus contrapartes en sistema decimal.

[2] KAYE, R. *The Mathematics of Logic. A guide to completeness theorems and their applications.* Cambridge University Press. Cambridge. 2007.

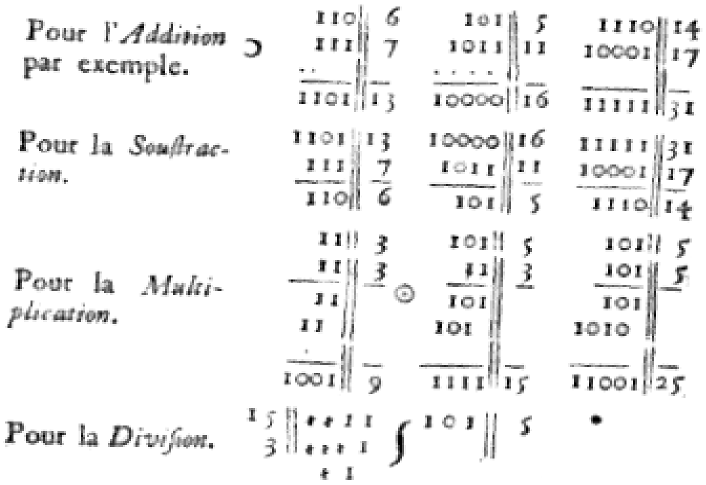

Fig. 1. Ejemplos de adición, sustracción, multiplicación y división en una página de la obra de Leibniz *Explication de L´Arithmétique Binaire*, publicada en 1705, donde se muestra los algoritmos para estas cuatro operaciones en sistema binario frente a los tradicionales del sistema decimal. Es apreciable como se simplifica en sistema binario, la actividad cerebral al realizar estas operaciones; en particular observe el algoritmo para el caso de $15 \div 3 = 5$.

El acceso al sistema binario es elemental y casi obvio, como lo veremos más adelante. Sin embargo este sistema llegó tardíamente a las matemáticas, si se tiene en cuenta, que registros numéricos aparecen en culturas antiguas desde hace más de cuatro mil años. Queda evidencia escrita además que, sistemas numéricos ya estaban en uso hace al menos cuatro mil años. Por ejemplo, un sistema sexagesimal se utilizó en Babilonia hace más de tres milenios, en China hace más de dos mil años se empleo un sistema decimal y en la Grecia clásica se usó un sistema decimal tomando como numerales las letras del alfabeto. Los mayas de comienzos de nuestra era utilizaron un sistema, esencialmente de base veinte, mientras que los incas, al arribo de los españoles en el siglo XVI, tenían bien establecido un sistema decimal, cuyos registros transferían a un instrumento de archivo, hecho de cuerdas anudadas conocido como *quipu*. El sistema decimal empleado hoy tiene su origen en India y llegó a nosotros a través de la cultura árabe de los siglos VIII y IX de nuestra era. El por qué no usamos el sistema binario, se explica posiblemente porque nuestras primeras cuentas las hacemos con el recurso de los dedos de las manos, nuestro ábaco más inmediato. El sistema decimal se tomó nuestra cultura y cerró el paso a otros sistemas más sencillos y prácticos de numeración, como es el caso del sistema binario. Es práctico porque además de usar sólo dos símbolos como numerales, sus tablas de adición y multiplicación no tienen sino cuatro entradas; muy pocas en comparación con las cien entradas de las tablas del sistema decimal [Ver comparación en la figura 3].

Al sistema binario se llega en diferentes formas. Una forma intuitiva de hacerlo es utilizar un diagrama de árbol, que se bifurca en cada nodo como se muestra en la figura 2. Aquí, entenderemos por nodo un punto donde llega o parte una flecha. Cada nodo, a partir del nodo inicial **1**, induce dos nuevos nodos que terminan en **0** o en **1**, respectivamente. Llamaremos nivel o piso de un nodo, al número de flechas o aristas necesarias para llegar, desde **1** hasta dicho nodo. Por ejemplo, los nodos **10** y **11** son de primer nivel, porque para acceder a ellos necesitamos sólo una flecha a partir del nodo inicial. Diremos que **0, 1** están en el nivel cero. Para llegar a **11000** se requiere recorrer cuatro flechas, lo que significa que este nodo es de cuarto nivel. El número de elementos en cada nivel es 2^n, donde n indica el nivel. Por ejemplo, en el nivel 4, habrá $2^4 = 16$ y en el siguiente nivel tendremos 32 elementos.

Llamemos **A** = {0, 1, 10, 11, 100, 101, 110,…}, al conjunto de los nodos del árbol. Podemos definir una función o asociación natural, f: **A** $\to$ **N**, donde a cada nodo le asignamos un número natural del conjunto **N** = {0, 1, 2, 3, 4, 5,…}, y viceversa a cada natural un nodo de la siguiente forma: $0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow 1$, $10 \leftrightarrow 2$, $11 \leftrightarrow 3$, $100 \leftrightarrow 4$, y así sucesivamente en ese orden. La función f es una biyección en el sentido de que a cada término de **A** le corresponde un elemento de **N** y viceversa. Esto permite identificar a los números naturales con los nodos del árbol de la figura 2. Esta asociación puede extenderse a la totalidad de los números reales al completar el árbol binario con el subárbol originado en 0 y con el recurso de la expansión:

$$r = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} a_j 2^j \,. \qquad (*)$$

Aquí $a_j \in \{0,1\}$ los dígitos del sistema binario, y j recorre los números enteros. Los subíndices negativos permiten la inclusión de fracciones binarias, como por ejemplo, la fracción binaria: $0.111 = 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}$, en donde $a_{-1}=1$, $a_{-2}=1$, $a_{-3}=1$, y $a_j=0$, para los demás casos. Este número corresponde en el sistema decimal al número 0.875. En análisis matemático se prueba que todos los números reales finitos se pueden identificar con los puntos del intervalo (**-1**, **1**) y así todos los reales, positivos, negativos y el cero pueden ser representados en forma binaria según la expansión (*****), acondicionando apropiadamente los coeficientes.

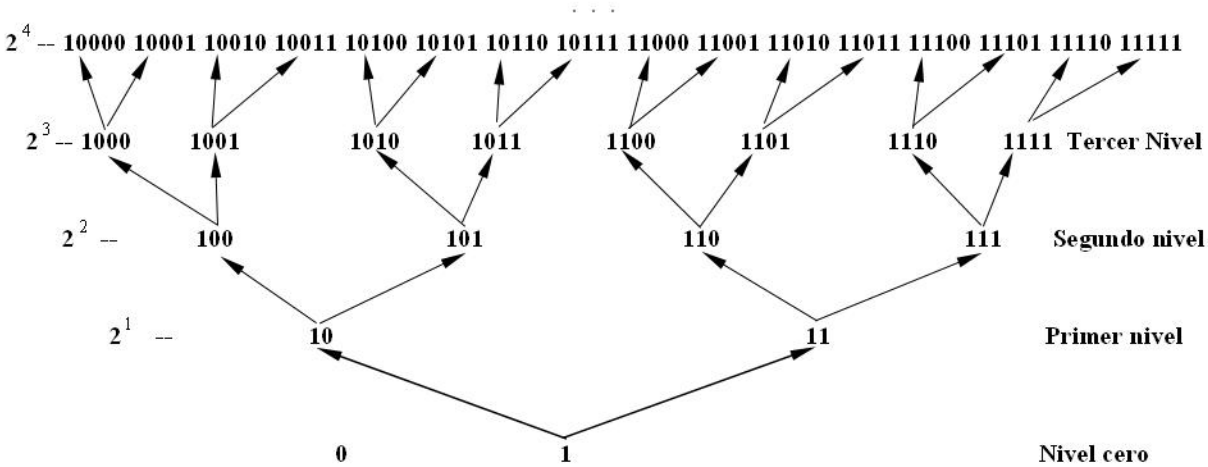

Fig. 2. La representación de los números naturales en forma binaria como nodos o vértices en un diagrama de árbol originado en **1**. En la base aparecen cero y uno y en los niveles superiores están los siguientes números ordenados de abajo a arriba y de izquierda a derecha, así: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110. 111, 1000, etc. asociados a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. El árbol binario completo se obtiene al abrir simétricamente otro diagrama de árbol por encima de **0** y uniendo los dos a una raíz común que podría ser el conjunto vacío.

Las operaciones aritméticas binarias son simples y fáciles de programar para que las máquinas las desarrollen, como lo observamos en las calculadoras y los computadores, cuyo lenguaje de máquina, por así decirlo, se basa en el sistema binario. Las tablas para la suma y la multiplicación no podrían ser más fáciles: $0+0=0$, $1+0=0+1=1$, $1+1=10$, y, $0\times 0=1\times 0=0\times 1=0$, $1\times 1=1$.

Esquemáticamente aparecerían como muestra la siguiente figura comparadas con las tablas decimales.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	2	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	16	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

+	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**10**

×	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

Fig. 3. Tablas de sumar y multiplicar en los sistemas decimal y binario. En este último, es más fácil multiplicar que sumar, según se desprende de la tabla de multiplicar en la que sólo hay que aprender que 1 por 1 es uno, todo lo demás es cero. Las primeras son las tablas pitagóricas que nos tocó memorizar en la escuela. ¡Cuántos esfuerzos y lágrimas les ahorraríamos a nuestros niños si les enseñáramos el sistema binario, en lugar del sistema decimal!

Decíamos que a los números binarios se puede llegar en la forma más primitiva posible, usando conceptos antagónicos como: todo o nada, si o no, lleno o vacío y aun asociando ideas opuestas o contrarias tales como — cerca o lejos, arriba o abajo, feo o bonito, blanco o negro, gordo o flaco, etc., etc. Estas ideas primitivas son parte de la carga genética con que el cerebro viene dotado y así muy sencillas de entender. Con estas ideas se puede asociar los símbolos "**0**" y "**1**". Para el niño estos símbolos pueden representar, digamos, *vacío* o *lleno*, *nada* o *todo*, o si se quiere, las palabras del léxico usual, "**cero**" y "**uno**". De aquí en adelante el proceso de rotular los números con únicamente dos símbolos es por asociación, como lo hicimos en el árbol binario: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111,… (Ver Fig. 2). Si los niños logran captar o fijar el mecanismo que subyace en esta disposición, estamos en posición de introducir el concepto de base para representar o marcar los números como tales. Una forma lúdica y poco convencional para llegar al sistema binario, puede verse en *Las Lecciones del "Payi" T1C-T0C*, un par de charlas del autor, dirigidas a niños de tercer grado elemental y que pueden leerse en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/Payi%20tictoc-Presentación.pdf y http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/Las%20Lecciones%20de%20Payi.%20Lección%202.doc

En el soporte de esta forma de nombrar los números está el número dos. Esto significa que con sólo dos símbolos podemos rotular o representar los números naturales, incluyendo el cero. De aquí en adelante no será difícil introducir el concepto de valor – llamémoslo, nivel o piso – en la secuencia natural de los números. Esto significa, en el caso binario[3] que, 0 y 1 están a nivel del suelo, digamos, en el nivel de la calle (nivel cero), mientras que 10 (uno cero, *no diez*) y 11 (uno uno, tampoco *once*) estarán en el primer piso por encima de la calle. En el segundo piso aparecen 100, 101, 110 y 111 (Ver Fig. 2). Por cada piso hacia arriba el número de nodos o vértices binarios se duplica. Lo importante de destacar aquí es que este crecimiento no es caprichoso, al contrario, sigue una regla simple: de un piso al siguiente el número de representaciones que aparece es el doble en comparación con el piso precedente. En otras palabras, en el primer piso aparece la representación de dos números (dos a la primera potencia), en el segundo, cuatro (dos a la segunda potencia) y así sucesivamente.

De aquí en adelante los niños están en condiciones de dar el salto a potencias del tipo 2^n, donde *n* significa el piso o nivel en el cual está el número. Observe que, después de la adición y la multiplicación, la potenciación es la operación más sencilla; ellas se constituyen en las operaciones básicas de la aritmética.

Al tiempo que estamos mostrando cómo representar los números de la secuencia natural en forma binaria también tenemos la oportunidad de mostrar que estos números se pueden expresar como suma de números tomados del mismo piso más números de pisos inferiores. Por ejemplo 1111 está en el tercer nivel, pero es la suma de 1000 (tercer nivel), más 100 (segundo nivel), más 10 (primer nivel), más 1 (nivel cero). Es decir: 1111 = 1000 + 100 + 10 + 1. Si logramos convencer a nuestros estudiantes que la aparición de *n* ceros después de 1 significa 2^n, habremos ganado una gran batalla, puesto que, desde aquí podemos introducir la representación:

$1111 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$.

Donde aparece el polinomio $1 \times x^3 + 1 \times x^2 + 1 \times x^1 + 1 \times x^0$ (cuando $x = 2$).

Aquí "×" significa por ahora, la asociación digital al piso correspondiente. Después de alguna práctica lograremos abstraer para ellos la idea de polinomio. Entre las entidades algebraicas, los polinomios son las expresiones más fáciles de captar, por estar constituidos por sumas, productos y potencias, las operaciones básicas de la aritmética.

Partiendo de este escenario de aprendizaje, se puede llegar sin mayor dificultad a los algoritmos de suma y multiplicación. Para el caso de la adición de dos números – aquí identificamos el número y su representación – comenzamos con la más simple de todas las tablas para la suma, como es:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Esta tabla solo significa que si deseamos adicionar números del nivel inferior (nivel de la calle o nivel cero) todo lo que necesitamos saber es que 1 + 1 es 10; las otras entradas en la tabla

[3] El sistema binario aparece también en el trabajo de Leibniz *Essay d'une nouvelle science des nombres*, en relación con el estudio del clásico del taoismo, el I Ching. Mayor información sobre este tema puede verse en mis notas de Epistemología de las matemáticas (página 90) que aparecen en: http: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

aparecen como obvias. Esto significa que sumar uno más uno es como subir al piso inmediatamente superior. Con esto en mente, la adición no es otra cosa que suma de polinomios. Practiquemos esto con un ejemplo simple. Supongamos que vamos a sumar 1111 + 1010. Usando la representación de 1111 vista arriba y la correspondiente representación de 1010, tenemos:

$$1111 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$$
$$1010 = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0$$

Encontramos:

$$1111 + 1010 = (1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0) + (1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0).$$

Por supuesto tendríamos que decir algo sobre el uso de paréntesis y la libertad que tenemos para mover y agrupar partes de las representaciones de tal forma que elementos de pisos iguales estén juntos. La suma entonces puede arreglarse así:

$$1111 + 1010 = (1\times 2^3 + 1\times 2^3) + (1\times 2^2 + 0\times 2^2) + (1\times 2^1 + 1\times 2^1) + (1\times 2^0 + 0\times 2^0).$$

En este punto del proceso, podemos ver cuatro adiciones de números homogéneos (cada par en el mismo piso). Podemos ahora usar la tabla de adición mostrada arriba, para efectuar 1 + 1 = 10; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 10, 1 + 0 = 1 y así obtener:

$$1111 + 1010 = (10\times 2^3) + (1\times 2^2) + (10\times 2^1) + (1\times 2^0)$$

El significado de 10×2^3, según la regla del salto al piso superior es 1×2^4, y en el tercer piso queda cero. También $10\times 2^1 = 1\times 2^2$ y queda cero en el primer piso. Cambiando los valores arriba queda:

$$1111 + 1010 = (1\times 2^4) + (0\times 2^3) + (1\times 2^2) + (1\times 2^2) + (0\times 2^1) + (1\times 2^0) = (1\times 2^4) + (0\times 2^3) + (1\,0\times 2^2) + (0\times 2^1) + (1\times 2^0) = (1\times 2^4) + (0\times 2^3) + (10\times 2^2) + (0\times 2^1) + (1\times 2^0)$$

Repitiendo el uso de la regla del salto al piso superior, $10\times 2^2 = 1\times 2^3 + 0\times 2^2$. Con estos cambios encontramos

$$1111 + 1010 = 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 11001.$$

La pregunta ahora es ¿qué hay de novedoso o notable en la argumentación anterior? Lo importante aquí es el hecho de dar una fundamentación a un algoritmo como:

$$\begin{array}{r} 1111 \\ +1010 \\ \hline 11001 \end{array}$$

Donde el arreglo que se muestra es análogo a lo que aprendemos en la primaria, para adiciones en el sistema decimal. Es claro que en el proceso anterior estamos haciendo más aritmética (matemáticas) que logística[4]. En este proceso hemos logrado construir una justificación para el algoritmo general de la suma. En la enseñanza tradicional de la aritmética se enfatiza en la memorización de los algoritmos a desmedro de la parte no menos importante de las matemáticas que es la justificación de los mismos.

El proceso desarrollado con 2, puede repetirse con 3, 4, 5, etc. Al llegar a 10, estamos en la aritmética de Al-Khowarizmi que se ha venido enseñando desde la Edad Media.

Entonces aparece la pregunta, ¿Por qué, siendo lo anterior tan sencillo y de fácil comprensión, no se enseña en la escuela? Pienso que una respuesta podría ser, por el poder de la "tradición". Porque no fue así como nos enseñaron las matemáticas a nosotros, ni a nuestros padres ni abuelos; por la misma razón además, que estamos enseñando geometría de Euclides y no una geometría realista como lo es la de Riemann.

En la práctica usamos procedimientos muy simples para doblar una cantidad o para reducirla a la mitad. Si se trata de la longitud de un segmento, su doble se obtiene por desplazamiento y su mitad hallando el punto medio ya sea geométricamente o con el uso de un hilo de longitud equivalente a la longitud del segmento al plegarlo sobre si mismo. La aritmética es independiente del sistema numérico que se use, por lo cual la aritmética en el sistema binario tiene la misma validez que la aritmética decimal. La ventaja de la primera sobre la segunda es que, los cálculos en el sistema binario son menos exigentes para la mente.

Cuando se quiere llevar un número de sistema decimal a binario se lo expresa como suma de potencias de dos. Su representación binaria tendría 1`s y 0`s en los lugares donde aparezcan o no potencias de dos en orden descendente de izquierda a derecha. Por ejemplo 28 = 16+8+4 = $2^4+2^3+2^2$. Como no aparecen potencias de 2^1 y 2^0, en esos lugares se escribe cero, en los lugares restantes irán unos. Así 28 se escribe en sistema binario como 11100, como se puede verificar en el diagrama de árbol de la figura 2. A la inversa si se quiere convertir un número dado en forma binaria a forma decimal, simplemente se suman decimalmente las potencias de dos, allí involucradas. Para el caso de 11100, tendremos: $11100 = 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0 = 2^4+2^3+2^2 = 16+ 8+ 4= 28$. Como decíamos, dividir por dos es muy fácil, así por ejemplo, al dividir un número por 2, y continuar dividiendo los cocientes por dos hasta encontrar un cociente menor que dos, llegamos también a encontrar la representación binaria del número, cuando éste está dado en forma decimal. Así por ejemplo para el caso de 28, tenemos: $28\div 2=14$+Rs (0), $14\div 2=7$+Rs (0), $7\div 2=3$+Rs (1), $3\div 2=1$+Rs (1), donde Rs, significa el resido de la división respectiva. Tomando como primer dígito el último cociente que será 1 seguido por los residuos correspondientes encontramos su representación binaria. Es decir 28 tiene por representación binaria 11100 como puede verificarse en el diagrama de árbol de la figura 2. La justificación de este procedimiento está en las divisiones sucesivas por 2. Paso a paso encontramos los diversos componentes del número correspondiente a cada piso; como lo hacíamos al principio al descubrir que cada número binario estaba representado por sumas sucesivas de elementos en cada piso empezando por el piso inferior. Para el caso de 28, en la primera división por 2, el residuo cero indica que en el piso inferior aparecerá 0. En la segunda división por 2, nuevamente el residuo es cero y así en el primer piso aparece 0. De allí en

[4] Para los antiguos griegos la *logística* tenía que ver con los cálculos y las rutinas de las operaciones aritméticas elementales y no tenía la relevancia de la *aritmética* que para ellos es lo que hoy llamamos Teoría de Números.

adelante los residuos son unos, indicando que en los siguientes pisos aparecerán sucesivamente tres 1´s.

La anterior visita a la aritmética de primaria tiene por objeto mostrar una pequeña parcela del terreno curricular matemático que podría enriquecerse con la inclusión de estos temas. Como puede notarse en esta corta nota, la introducción del sistema binario, nos da pie para anticipar conceptos matemáticos importantes como: bases numéricas, polinomios y temas avanzados como los diagramas de árbol. Y más importante que todo, al llevar al aula de clase el sistema binario nos estamos acercando, no sólo al lenguaje con el que trabaja el computador, si no también, a aspectos de las matemáticas aplicadas, a la teoría de la información y la comunicación, al álgebra de Boole, a la transformada de Haar que motiva la teoría de las *wavelets*, a distribuciones básicas en la teoría de las probabilidades, como es, la distribución Bernoulli y más allá aun, a *Polinomios ortogonales*, como los polinomios de Bernstein, y por qué no, a introducir conceptos de lógica moderna como jerarquías en la teoría de tipos de Russell.

Estas notas contienen una parte de mi ponencia *El Gran Vacío entre la Educación Matemática y el frente de las Matemáticas*, aceptada para ICME 11 2008 en Monterrey, México y cuya versión en idioma inglés puede leerse en la página Web del *International Congress of Mathematics Education*: http://tsg.icme11.org/document/get/571

Armenia, Septiembre 19 de 2008.