¿Qué buscaba Leibniz con su *Charasteristica Universalis*?

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío*

"Cuando yo uso una palabra, – dijo Humpty Dumpty en tono desdeñoso – ésta significa, justamente lo que yo quiero que signifique, ni más ni menos".
"La cuestión, dijo Alicia, es que usted puede hacer que las palabras signifiquen muchas cosas diferentes".
"La cuestión es, repuso Humpty Dumpty, ¿quién es el maestro?, eso es todo." *Alicia a través del Espejo*. Pág. 213 en la Edición anotada de Martin Gardner.

Resumen:
En esta charla quiero llamar la atención sobre un tema poco tratado de la obra de Leibniz: la creación de un lenguaje universal que sirviera como vehículo de transferencia para los razonamientos y descubrimientos en todos los campos del conocimiento. En particular enfocaremos nuestro interés en el soporte teórico con que Leibniz apalancó la creación y aplicaciones de los infinitesimales.

***Abstract*:**
In this lecture I want to call the attention on a topic no much studied of Leibniz´ work: the creation of a universal language designed to serve as a transference vehicle of reasoning and communication in all fields of knowledge. We´ll mainly focus our interest in the principles where Leibniz made the leverage for the creation and applications of infinitesimals.

Introducción[1]

Desde que en 1734 George Berkeley (1685–1753) publicó *El Analista*, los fundamentos del cálculo infinitesimal se han venido cuestionando. Los ataques estuvieron dirigidos en general contra los postulados de la ciencia cuyos abanderados en su época eran entre otros, John Locke (1632–1704) e Isaac Newton (1643–1727) y en especial contra el soporte teórico del cálculo infinitesimal, recién inventado, independientemente por Leibniz y Newton. El cuestionamiento continuó aun en el tiempo en que Augustin Louis Cauchy (1789–1857) y Karl Weierstrass (1815–1897) le dieron mejor soporte recurriendo a lo que ha dado en llamarse la aritmetización del análisis.

En los años sesentas del siglo pasado Abraham Robinson continuó el cuestionamiento a los infinitesimales, pero esta vez introduciendo una nueva faceta de las matemáticas, el *análisis no estándar*, en la que a través de la teoría de modelos se puede extender los números reales de modo que den cabida a números infinitamente grandes, como también a los infinitesimales introducido por Newton y Leibniz.

Casi tres siglos después (empezando con un artículo de H. J. M. Bos en los *Archives of the History of Exact Sciences*), la rehabilitación de la teoría de los infinitesimales de Leibniz empieza a tomar forma al examinar los escritos en que Leibniz formula sus principios, de pronto

[1] Este escrito es una adaptación del artículo de Katz, M. G. et al. que aparece en la bibliografía al final.

demasiado intuitivos para nuestra época, pero aun con la validez dentro de la teoría por él propuesta. Entre estos principios describiremos: la *ley de continuidad*, el *principio de soberanía* y la *ley trascendental de homogeneidad.*

Antes de entrar en el tema, hagamos algunas acotaciones sobre la obra de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Empecemos con una cita de Julián Marías[2]
"Vean ustedes como es la amplitud de una figura extraordinaria: (Leibniz) es quizá el último hombre en Europa capaz de poseer el universo de las ciencias. Después, esto no ha sido posible, por la especialización, por el crecimiento de la información... Y actualmente se llega hasta el extremo de que los científicos no conocen la disciplina que profesan, sino conocen una pequeña parcela de ella: un botánico que está especializado en las algas o en determinada variedad de algas y nada más, no sabe mucho de lo demás. Y lo mismo ocurre con el físico, con el químico, con todos los científicos. Hay una parcelación del saber que impide la visión universal que posee todavía Leibniz."

Y a renglón seguido resalta las tendencias degradantes de la filosofía en épocas recientes.

"¿Es esto posible? ¿Es necesaria esa visión de conjunto, la visión abarcadora del real? Ustedes piensen que la crisis de la filosofía en estos últimos decenios, que es muy grande – lo que se llama filosofía, muchas veces, tiene muy poco que ver con ella – consiste precisamente en un abandono de la perspectiva filosófica, del punto de vista filosófico. El filósofo, no sabe casi nada sobre casi todo, pero tiene el punto de vista filosófico: él se pregunta sobre la realidad y por el puesto que cada cosa, cada parroquial realidad, tiene en el conjunto de la realidad. En esto consiste la filosofía y por esto siempre insisto en que se trata de hacer, las preguntas radicales: … las respuestas son inseguras, no son necesarias, a veces no se encuentran... pero si se hacen las preguntas radicales, se está haciendo filosofía; si no se hacen esas preguntas –hágase lo que se haga – se está fuera de la filosofía. Y es interesante ver como el exceso de crítica que aparece ya después de Leibniz, justamente consiste en una serie de renuncias... Renuncias que van a estar de cierto modo compensadas por lo contrario: por excesos."[3]

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig en 1646 y murió en Hannover en 1716. Su universalismo, como lo dice Julián Marías, es aun más meritorio si se tiene en cuenta que Leibniz vivió y se destacó en una época de científicos tan importantes como Blas Pascal, René Descartes, Pierre de Fermat, Isaac Newton y Christian Huygens. Después de terminar sus estudios a edad muy temprana, se podía decir de él que, era ya, todo un académico. Sin embargo, fue después de terminar la universidad que empezó a complementar sus conocimientos con el estudio de las matemáticas. Para él, la geometría de Euclides era un misterio y la geometría de

---

[2] **Julián Marías Aguilera** (1914 - 2005), filósofo de la Universidad de Madrid, y el discípulo más destacado de Ortega y Gasset. Ensayista y distinguido filósofo. No enseñó en las universidades españolas en el tiempo de Franco por discrepancias ideológicas, pero fue conferenciante en numerosos países de Europa y América y profesor en varias universidades de Estados Unidos. Su presencia en el mundo intelectual español ha sido constante: colaborador de las publicaciones más relevantes, fue miembro de la Real Academia desde 1964 y senador por designación real entre 1977 y 1979. En 1996 se le concedió el Premio Príncipe de Asturias de Comunicación y Humanidades. Tomado de Wikipedia.
[3] MARÍAS, J. "*Los estilos de la Filosofía*", Madrid, 1999/2000 - edición: Jean Lauand. Conferencia tomada en Mayo 1, 2013, de: http://www.hottopos.com/mp2/leibniz.htm .

Descartes le parecía ininteligible. No obstante, pasados algunos años logró ser un experto, no sólo en geometría, sino en todo el amplio espectro de las matemáticas de su tiempo. Más aun, contribuyó al enriquecimiento de las matemáticas con sus propios aportes, sobre todo al recién inventado, cálculo infinitesimal, nombre, que entre otras cosas, se debe a él, pues para Newton, el cálculo era la teoría de las fluxiones y de las cuadraturas. El ser abogado de profesión y diplomático de carrera, le permitió entrar en contacto con las esferas más altas de la sociedad de la antigua Prusia, de la sociedad francesa de Luís XIV, incluyendo su acceso a la Academia de Ciencias de Paris, de la flemática sociedad londinense que lo acogió como uno más de los miembros de la Royal Society de Londres y finalmente fue fundador de la Academia de Ciencias de Berlín.

En Busca de un Lenguaje Universal: Characteristica Universalis.

A Leibniz lo recordamos por sus aportes a las matemáticas y a la filosofía y por sus intentos de crear un lenguaje universal que sirviera de medio para la deducción y el descubrimiento en ciencia y filosofía. A este lenguaje universal al que dio el nombre de *Characteristica Universalis*, lo consideró perfecto para representar conjuntamente las ideas y la mecanización del razonamiento filosófico. Leibniz compara su sistema a los lenguajes chino y del antiguo Egipto, para él, estos lenguajes eran el primer paso hacia su *characteristica Universalis*, el lenguaje perfecto que ofrecería una representación directa de las ideas junto a un cálculo del razonamiento filosófico. *Dentro* de este enfoque universalista Leibniz también escribió *Ars Combinatoria* donde los primeros ejemplos los toma del derecho, el registro musical del órgano y la teoría arist{otelica de generación de elementos a partir de las cuatro calidades primarias: agua, tierra, aire y fuego. Las aplicaciones filosóficas de esta obra son de gran interés. Allí cita la idea de Thomas Hobbes (1588- 1679) de que todo el razonamiento no es si no computación.

La propuesta de creación de lenguajes para la ciencia tiene larga historia. Raimundo Lulio propuso un lenguaje donde encasillar los razonamientos, Galileo propuso llevar el lenguaje de las matemáticas para entender el mundo y sus leyes. A fines del siglo XIX, Giuseppe Peano (1858-1932) usó un lenguaje exclusivo para transmitir las proposiciones matemáticas y finalmente en los años treinta del siglo pasado Rudolph Carnap (1891–1970) propondría la creación de una *lingua franca*, a través de la cual los filósofos y científicos pudieran entenderse. Actualmente en pleno siglo XXI, Stephen Wolfram (el creador de *Mathematica*) ha propuesto un nuevo lenguaje para la ciencia: el *Lenguaje Wolfram* un lenguaje computacional con contenido intrínseco de amplio espectro, con estructuras y algoritmos incorporados. Este es un lenguaje simbólico, de principios claros, capaz de describir estructuras arbitrarias buscando automatizar lo más posible todo aquello que hace.

En el caso de Leibniz la inquietud por buscar un lenguaje universal (en sus propias palabras, *Characteristica Universalis*), estuvo motivado por el interés que despertó en él, la escritura ideográmica china de un lado y los jeroglíficos egipcios, del otro. Lenguajes como estos llevan directamente la escritura a su interpretación semántica, en otros términos, el significado del ideograma es inmediato y no depende de lo que quiso decir el escritor, ni de como lo va interpretar el lector. A esto es a lo que se refiere Alicia en su diálogo con Humpty Dumpty que aparece como epígrafe al presente artículo.

Así como la música tiene su lenguaje propio construido con elementos básicos simples, como son el sonido y el silencio, su Characteristica Universalis debería también empezar con elementos básicos y con unos principios de construcción estructural que gobernaran la combinación de los elementos básicos de modo que nos permitan más o menos por medios mecánicos representar acertadamente todos los conceptos, verdades, pensamientos o estructuras en un campo específico del conocimiento. La idea crucial aquí es la composición de las diferentes partes del lenguaje. Joachim Jungius (1587 – 1657) veía el método matemático válido para estudiar la naturaleza porque precisamente "la naturaleza no actúa de la manera en que escriben los chinos, si no como lo hacen los otros, con un alfabeto… a través de combinaciones, complicaciones, y replicas de unas pocas hipótesis, leyes, o principios".

En el trabajo de Descartes, Jungius y Leibniz, sin embargo, dos distintas ideas corren parejo: la idea de *characteristica* como una adecuada representación de las relaciones entre conceptos, y la idea de la *characteristica* como espejo de la realidad.

Desde el siglo XVI se habían introducido los números imaginarios con el objeto de dar solución a ecuaciones algebraicas y Leibniz pensó que según esto, no era descabellado también pensar a los infinitesimales como entidades ficticias sin representación empírica asequible en la práctica. Esta forma de concebir los infinitesimales aparece a los ojos del obispo Berkeley como misteriosa y muy alejada del punto de vista empirista de su filosofía, cosa que motivó su reacción induciéndolo a escribir su obra *El Analista* enfilada al ataque del cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz, que según él, carecían de un basamento lógico. Por el contrario, hoy a la luz de la interpretación de textos que no fueron entendidos en su época, entre ellos el conocido cortamente como *Cum Prodiisset*, los estudiosos contemporáneos de estos temas sostienen que la argumentación de Leibniz para sustentar el cálculo infinitesimal fue sólida y libre de contradicciones.

El primer paso de Leibniz hacia la consecución de su objetivo fue la de visionar un lenguaje para trasmitir el cálculo infinitesimal.

Los pilares de la argumentación de Leibniz son el *método exhaustivo* cuyos orígenes se remontan a los trabajos de Arquímedes y la *ley de continuidad* muy usada por Johann Bernoulli. Esta última puede sintetizarse diciendo que *las reglas que valen en lo finito permanecen válidas en el tránsito hacia el infinito.* Uno se puede preguntar cuál es el estatus ontológico de estas entidades infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, pero Leibniz se adelantó a su tiempo al considerar que las entidades matemáticas no tienen porqué tener un referente o una contraparte empírica. Ocurre como en el caso de la geometría, aunque en la realidad no existan ni puntos, ni rectas, ni planos, sin embargo, hemos hecho matemáticas a partir de esas abstracciones. Como decía el mismo Leibniz:

> Filosóficamente hablando, no reconozco más, magnitudes infinitamente pequeñas que infinitamente grandes… Yo sólo las tomo como ficciones mentales, como modos más

> convenientes de hablar y que se adaptan adecuadamente al cálculo, justamente como ocurre con las raíces imaginarias en el álgebra.[4]

Del *Cum Prodiisett* es la siguiente cita

> En una transición supuestamente continua, que culmina en algún término, es permisible estatuir un razonamiento general, en el cual el término final puede también quedar incluido.

Leibniz da varios ejemplos de la aplicación de su ley de continuidad, entre ellos los siguientes:

1) En el contexto de la discusión de líneas paralelas, escribe:

> Cuando la recta BP finalmente llega a ser paralela a la recta VA, aun en ese momento en que converge hacia ella o hace un ángulo con ella, ángulo es entonces infinitamente pequeño.

2) En relación con la idea de que el término *igualdad* podría referirse a la igualdad salvo un margen de error muy pequeño, esboza este ejemplo:

> Cuando un segmento de recta es igual a otro, decimos que ellos son desiguales aunque la diferencia es infinitamente pequeña.

3) Se puede expresar una parábola por medio de una elipse para la cual uno de sus focos se desplaza al infinito.

> Una parábola es la forma última de una elipse, en la cual el segundo foco está a una distancia infinita del foco más cercano el vértice dado.

En el C*um Prodiisset*, Leibniz, a la manera de Euclides, establece como axiomas, enunciados como "Rectas paralelas nunca se encuentran" o "Cosas absolutamente iguales tienen una diferencia que en absoluto, es nada" o finalmente que "Una parábola no es lo mismo que una elipse". Estas aseveraciones parecen reñir con los tres ejemplos anteriores, pero más adelante refiriéndose al estado de transición (*status transitus*, en el latín original) dice:

> Un estado de transición puede ser imaginado, o evanescente, en el cual aun no ha aparecido igualdad exacta … o paralelismo, pero que está en esa transición, que la diferencia es menor que cualquier cantidad asignable; también que en ese estado aun permanece alguna diferencia … algún ángulo que en cada caso es infinitamente pequeño; o la distancia de intersección de las dos rectas y la distancia del foco variable al foco fijo es infinitamente grande y la parábola podría incluirse en el rango de una elipse.

En estos procesos de transición Leibniz usa el vocablo *terminus* para incluir el *status transitus* que involucra el paso hacia una entidad asignable que aun no se ha asignado. En nuestro lenguaje del análisis matemático lo que llamamos límite no es exactamente lo que Lebniz trata de significar con *terminus*. El límite de $1/x$, cuando x crece indefinidamente es 0, pero

[4] C. I. Gerhardt (ed.). *G. W. Leibniz Philosophische Schriften, 7 Vols.* (1875-1890). Citado por Katz en la bibliografía.

cero no puede ser representado como un cociente $1/x$. Sin embargo podría decirse que 0 está en el rango de los cocientes del tipo $1/x$.

Leibniz reconoce que el estatus metafísico de los infinitesimales está abierto a la controversia pero que sin embargo los métodos que se derivan de su estudio son de valiosa utilidad para aquellos que se alejan de controversias como es la *constitución del continuo* y dedican su tiempo a las aplicaciones. En sus propios términos

> Si alguien quiere entender esto [verbigracia, lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño], como cosas concretas o como infinito actual, lo puede hacer, y que también sin desgastarse en controversias en torno a la extensión de la realidad o de continuos infinitos en general, o de lo infinitamente pequeño, aunque el piense que tales cosas a la final sean imposibles; será suficientemente simple hacer uso de ellas como herramientas que ofrecen ventajas para propósitos de cálculo, justamente como los algebristas recurren a las raíces imaginarias con buen éxito.

De la anterior cita se desprende la inclusión por parte de Leibniz del infinito actual en las matemáticas sin comprometerse filosóficamente en su realidad ontológica. Desde tiempos medioevales el problema del infinito actual y el infinito potencial era un problema abierto. Aristóteles reconocía el infinito potencial como una forma de significar que algo crecía sin medida y Arquímedes sostenía que no importa que tan pequeño sea x y que tan grande sea Y, siempre existirá un número natural n tal que $nx>Y$. Esta es la conocida *Propiedad Arquimediana* de los números reales.

Implementación Matemática del *Status Transitus*

En los tres ejemplos citados arriba, Leibniz asume que los infinitesimales no son más que ficciones y sus métodos no tienen ningún compromiso metafísico. Así él explota las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas como lo hicieron Albert Girard (1598-1632) y otros con las raíces imaginarias para simplificar el álgebra. De este modo Leibniz se anticipó a la posición formalista liderada primero por David Hilbert (1862-1943) y luego por Abraham Robinson (1918-1974).

Es bueno aclarar que el enfoque heurístico seguido por Leibniz es diferente a la forma que hoy vemos a los infinitesimales a la luz de los trabajos de Robinson y Jerome Keisler (1936-) que han puesto de nuevo en boga las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, pero que la teoría por ellos desarrolladas permite implementar matemáticamente los procedimientos heurísticos introducidos por Leibniz. El caso del ejemplo 2 puede ilustrarse usando la notación de Leibniz, $(d)x$ para denotar una cantidad positiva. La cantidad asignable $(d)x$ pasa por la vía de los infinitesimales a dx en su camino al cero absoluto. Esto significa que el *status transitus* es precisamente dx y cero es la “sombra” asignable, o la parte real estándar de este infinitesimal. Un segmento de recta de longitud $2x + dx$ puede considerarse igual a uno de longitud $2x$ salvo un infinitesimal. Este *status transitus* es el fundamento de la definición de cociente diferencial introducido por Leibniz.

Para ilustrar el procedimiento seguido por Leibniz, consideremos el ejemplo 1 visto arriba.

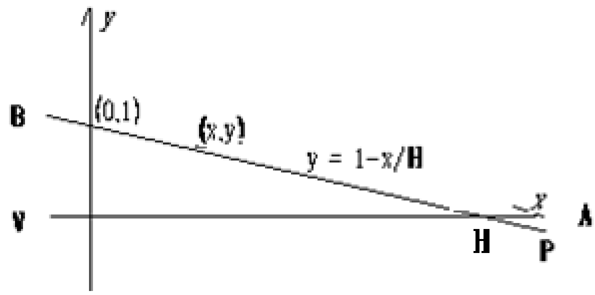

Figura 1. La recta **BP** que pasa por el punto (0,1), con punto de intersección en **H** con la recta **VA,** se levanta hasta volverse paralela a la primera recta. A medida que el punto de intersección **H** se aleja, el ángulo que forman las dos rectas decrece hasta volverse cero al pasar por el punto en el infinito.

Sigamos a Leibniz, trazando la recta L_H que pasa por (0,1) y que va a ser paralela al eje x en el plano *xy*. Esta recta intercepta al eje x en $\boldsymbol{H}$ y tiene por ecuación $y = 1 - x/H$. La recta tiene pendiente negativa y depende de H. Cuando H crece indefinidamente la pendiente se acerca a 0 con valores negativos y el correspondiente ángulo tiende a cero. En ese punto es cuando las rectas se vuelven paralelas. Denotemos por st(x) la sombra asignable (real) del número real finito *x*. Entonces cada punto finito (*x*,*y*) en la recta L_H, satisface

$$\begin{aligned} \mathrm{st}(x,y) &= (\mathrm{st}(x),\mathrm{st}(y)) \\ &= (\mathrm{st}(x),\mathrm{st}(1 - x/H)) \\ &= (\mathrm{st}(x),1). \end{aligned}$$

Se sigue que la porción finita de L_H es infinitamente cercana a su sombra que es la recta *y* = 1 paralela al eje *x*, lo que quiere decir que la variación de la recta oblicua pasa por el *status transitus* en la medida en que el parámetro *H* pasa a ser infinito.

Un análisis algebraico elemental conduce igualmente a que una familia de elipses dependiente de un parámetro, que para el caso es la distancia de un foco fijo al otro que se mueve hacia el infinito, terminará en una parábola cuyo foco es aquel fijo de la elipse, como muestra la figura.

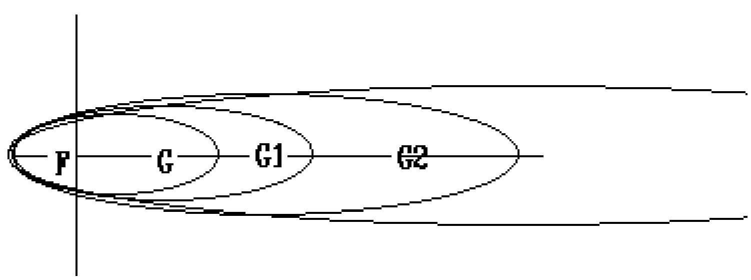

Figura 2. Una familia de elipses con focos ***F***, ***G***, $G_1, G_2, \ldots$, terminará en un parábola con foco en ***F***, en la medida en que la distancia entre los focos vaya a infinito. Ese tránsito de la elipse a parábola es en este caso lo que Leiniz llama *status Transitus*.

Razonamientos de este tipo son comunes en el dominio de los números ordinarios asignables finitos, pero ¿por qué estos razonamientos permanecen válidos cuando se aplican al dominio de los números inasignables (infinitos o infinitesimales)? La validez de la transferencia del este razonamiento general, originalmente estatuido en el dominio finito es precisamente el contenido de la *Ley de Continuidad de Leibniz*. Para terminar esta sección sinteticemos el *Principio de Continuidad* en los siguientes términos: Las reglas de lo finito se transfieren al infinito y viceversa.

Ley trascendente de homogeneidad.

Para mediar entre cantidades asignables e inasignables, Leibniz introdujo otro principio: *la ley trascendente de homogeneidad* (*lex homogeneorum trascendentali*), que gobierna las ecuaciones que involucran diferenciales. Esta ley permite, en pocas palabras, desechar cantidades infinitamente más pequeñas en comparación con otras. Así, todos los términos en una ecuación, excepto aquellos del máximo orden de infinito o del menor orden de pequeñez infinitesimal pueden descartarse. Por ejemplo, si *dx, ddy* son diferenciales, entonces las ecuaciones siguientes se satisfacen.

$$a + dx = a$$
$$dx + ddy = dx.$$

En esta ley se fundamenta Leibniz para hallar la fórmula de derivación del producto de dos funciones, *u,v*:

$$\begin{aligned} d(uv) &= (u + du)(v + dv) - uv \\ &= udv + vdu + dudv \\ &= udv + vdu \end{aligned}$$

Donde la reducción en el último renglón se debe a la ley de homogeneidad.

BIBLIOGRAFÍA

Bos, H. J. M. "Differentials, Higher-Order Differential and the Derivative in theLeibnizian Calculus", *Archive for History of Exact sciences*, (1974-75). Vol. 14.

Arthur, R. T. W. *Leibniz´ Syncategorematic Infinitesimals, Smooth Infinitesimal Analysis and Second-order Differentials.* Tomado de Internet Mayo 7, 2013.

Katz, M. G. *et al. Leibniz´ Laws of Continuity and Homogeneity*. Notices of the American Mathematical Society. Vol. 59, No. 11. December 2012.

C. I. Gerhardt (ed.). *G. W. Leibniz Philosophische Schriften, 7 Vols.* (1875-1890). Citado en Katz

Primer Borrador. Armenia, Colombia, Mayo 2013.