El Lenguaje Numérico
Una Alternativa Diferente de Enseñar Aritmética Elemental

Diego Pareja-Heredia. ***Universidad del Quindío***

"Bajar es abismarse en lo que nos sustenta, es desfondar el fundamento que nos subyace". Fernando Savater. *La Infancia Recuperada*.

Resumen

El lenguaje numérico, como todo lenguaje coloquial, tiene sintaxis y semántica propias, que pueden entenderse desde los primeros años de la escuela elemental. En esta charla, presentaremos el lenguaje numérico mediante propiedades heredadas del cuerpo de los polinomios. El objetivo central de la educación matemática apunta a integrar en la enseñanza elemental, conceptos clásicos aunque con un enfoque matemático moderno, y aquí buscamos hacerlo a través de una metodología no tradicional.

Abstract

Numerical language, as any colloquial language, has its own syntax and semantics, which can be understood at early stages of elementary school. In this talk we present numerical language, using properties inherited from the field of polynomials. The central aim for mathematics education is to introduce in elementary teaching, clasical concepts from a modern point of view and we try to do it through a non conventional approach.

Introducción

Hace dos años Yitang Zhang, con su artículo relacionado con baches acotados entre números primos[1], renovó en la comunidad matemática internacional el interés por los números primos gemelos. Primos gemelos son parejas de números primos del tipo p, $p + 2$, ambos primos, esparcidos irregularmente entre los naturales. De vez en cuando ellos aparecen en *decadas primas*, como, 11, 13, 17, 19; 101, 103, 107, 109; 3461, 3463, 3467, 3469; etc.

En diciembre de 1997, apareció una extensión del Último Teorema de Fermat, hoy conocida como *Conjetura* o *Problema de Beal,* a la que el autor puso un premio, hoy actualizado a un millón de dólares, para quien diera una solución satisfactoria. Problemas como estos, de actualidad mediática, es posible tocarlos con algún detalle en el aula de

[1] Yitang Zhang. *Bounded gaps between primes*. Annals of Mathematics. Vol. 179. Issue 3 (2014)

clase elemental y compartir con los estudiantes algunos aspectos intrigantes y misteriosos de la teoría elemental de números.

Por años, en la comunidad matemática, se ha notado una enorme preocupación por el distanciamiento entre lo que enseñamos en el aula de clase hoy, y las matemáticas que hacen noticia en el mundo, un mundo lleno de tecnología y cada vez más intercomunicado, muy distinto al que vivieron nuestros padres y abuelos. En mi presentación[2] de ICME11, Monterrey, llamaba la atención precisamente sobre este aspecto de la educación matemática, e invitaba a la reflexion a aquellos matemáticos que tienen que ver con estos aspectos, a fin de proponer soluciones encaminadas a cambiar la concepción de lo que es la enseñanza de las matemáticas elementales.

En los pasados años he propuesto varias altenativas de cambio en el currículo y en las metodologías a seguir, para que la enseñanza de las matemáticas no muestren ese toque característico de obsolescencia. A lo largo de este artículo quiero recabar en una concepción no tradicional del concepto de número natural. A diferencia de la concepción pitagórica de que el conjunto de los números naturales es un conjunto engendrado por un "divino generador" (el número 1), aquí proponemos definir número natural a través de las operaciones básicas que hacen a los números naturales, importantes en la teoría, y en la práctica. Esta nueva concepción, se finca en el concepto intuitivo de polinomio, que combina operaciones como adición y multiplicación. Esto nos permite introducir en forma natural, algoritmos sustentables para estas operaciones básicas. Con una metodología de este tipo podremos familiarizarnos con conceptos fundamentales, como infinitud, primalidad, congruencia y otros.

Los niños de quinto grado, o de incluso antes, podrían hallar décadas primas y enterarse sobre el último teorema de Fermat y la conjetura de Beal, si la aritmética elemental tuviera un enfoque centrado en la sintaxis y la semántica, explicadas en esta charla y en algunos artículos que aparecen en: http://matematicasyfilosofiaenelaula.info/

A lo largo de este trabajo iremos examinando algunos resultados expuestos en varios artículos relacionados con el tema de la enseñanza de las matemáticas a nivel elemental, empezando con la representación polinómica de los números hasta llegar a temas de actualidad en la fronteras de la teoría de números como los ya mencionados. También propondremos un método para hallar los factores primos de un número natural sin recurrir a la división, método que, a juicio y conocimiento del autor, no ha sido publicado antes.

Sintaxis y Semántica en el Lenguaje de los Números.

En la base del lenguaje numérico reposa el conjunto de los números naturales, o números enteros no negativos. Paralelamente al lenguaje hablado o lenguaje coloquial, se aprende desde la primera infancia el lenguaje numérico. Como cualquier otro lenguaje, el lenguaje numérico tiene su sintaxis y su aspecto semántico que nos lleva a la comprensión del mismo. La sintaxis es el conjunto de reglas de composición del "discurso numérico" y el

[2] **Pareja-Heredia, Diego, The Huge Gap between Math Education and the front of Mathematics.** Preliminary Version). http://tsg.icme11.org/document/get/571

segundo aspecto, la semántica, nos dará las pautas para entender y comprender el significado de ese discurso y las normas de autenticación y validación del mismo. La semántica, juega un rol crucial en el lenguaje por sus repersecusiones lógicas y por sus bases profundamente filosóficas, ya que su validación, según Tarski[3], no puede hacerse dentro de ese mismo lenguaje.

El lenguaje numérico tiene su alfabeto y sus reglas de composición. Las *palabras* numéricas estarán constituidas por cadenas o cuerdas (*strings*) de símbolos, ligadas por operaciones, que figuran explícita o tácitamente en estas oraciones numéricas. Estas operaciones son la adición y la multiplicación inherentes al lenguaje de los números. Las palabras de este lenguaje son los números y están ligadas por igualdades, operaciones, relaciones de orden, conectivas lógicas, etc.

Los Números en el Lenguaje Coloquial.

Al traducir un número, del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico, lo que la mente hace es interpretar los sonidos que recibe y convertirlos en símbolos previamente aprehendidos, que a su vez traduce a símbolos impresos, cuando de escribir se trata; o los graba en la memoria para procesarlos, si es del caso. Por ejemplo, cuando pronuncio las palabras: *dos mil novecientos cuarenta y tres,* mi mente las guarda simbólicamente como "2, 9, 4, 3", pero las interpreta semánticamente como "*dos, veces, mil, más, nueve, veces, cien, más, cuatro, veces, diez, más, tres*". Si por simplicidad, tomamos a 10 como x, a cien como x^2, y a mil como x^3, el proceso mental se convierte en una expresión algebraica del tipo,

$$2943 = 2\cdot x^3 + 9\cdot x^2 + 4\cdot x + 3$$

Donde los símbolos, "·" y "+", están asociados a la multiplicación y a la adición usuales, respectivamente. Observe que la palabra *veces* del lenguaje coloquial, se convierte en multiplicación y la conjunción *y* toma el lugar de suma. En el último caso, ése es el origen del signo " + ", pues en los manuscritos latinos de textos matemáticos, la conjunción *et* se simplificaba como *t* y de allí deriva el símbolo + para la suma. Aun, en algunas partes de habla inglesa, se usa + para sustituir a la conjunción " and", ó, "&".

Como todo lenguaje, el numérico tiene su alfabeto. En el caso de la representación decimal, este alfabeto contiene los símbolos {0, 1, 2, 3 ,4, 5, 6, 7, 8, 9}. Este alfabeto puede reducirse a {0, 1} cuando se trata de representar los números en forma binaria. Por ser nuestro sistema posicional, el valor de una cifra en el *numeral* (la representación simbólica del número), va a depender del lugar que ocupa, es decir, el valor de las cifras crece de diez en diez, en cada paso de derecha a izquierda. Esta característica la representamos simbólicamente como

$$\boxed{x^n = 10x^{n-1}} \qquad (*)$$

[3] Ver mis notas de Epistemología en particular: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Definicion%20de%20Verdad%20Tipo%20Tarski.pdf

Aquí n, denota la posición n-ésima en el numeral, contando de derecha a izquierda y comenzando con cero. La igualdad representada en (*) se constituye en la primera regla sintáctica de nuestro lenguaje numérico y la podemos interpretar diciendo que el valor de la posición n-ésima es diez veces mayor que el valor de la posición n-1.

En general todo número natural $a = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$, donde las a_i son los dígitos o cifras tomados del alfabeto decimal, se puede expresar en forma única, llamémosla *representación estándar*, como:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0 = \sum_{j=0}^{j=n} a_{n-j} x^{n-j} .$$

La regla sintáctica (*) nos permite representar los números en otras formas como suma de términos de la forma $b_j x^j$, teniendo en cuenta la convención, $x = 10$. La cifra a_0, corresponde a lo que llamamos unidades, a_1, serían las decenas, a_3, las centenas, etc.

***Ejemplo* 1**. El número 3763 tiene su representación estándar como $3x^3 + 7x^2 + 6x + 3$. Hay, por supuesto, otras representaciones polinómicas que llevan al mismo número (con la convención que $x = 10$), como las siguientes:

$$2x^3 + 17x^2 + 6x + 3 \ , \ 2x^3 + 16x^2 + 16x + 3 \ , \ 2x^3 + 16x^2 + 15x + 13 \ , \ 37x^2 + 6x + 3 \ ,$$
$$36x^2 + 16x + 3 \ , \ 35x^2 + 26x + 3 \ , \ 3763 \text{ , etc.}$$

Así como los números reales se pueden definir en términos de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy[4], también los números naturales se pueden definir recurriendo a clases de equivalencia, pero en este caso, de polinomios de una variable, del tipo

$$\sum_{j=0}^{j=n} b_{n-j} x^{n-j}$$

Donde ahora, no todos los coeficientes b_{n-j} son necesariamente los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, como lo mostramos en el ejemplo anterior.

El definir a los naturales como polinomios, nos permite usar de estos últimos, sus propiedades de cuerpo algebraico para definir las operaciones básicas de adición y multiplicación. También, al identificar números con polinomios, podemos recurrir a las propiedades de anillo euclidiano que tienen los polinomios, para garantizar en los enteros, la factorización única como producto de primos.

Al representar los números naturales como polinomios, podemos efectuar operaciones, como suma y multiplicación, "de corrido", es decir, como si redactáramos un discurso coherente, en donde cada paso, es consecuencia del paso previo. Esta sucesión de pasos, termina en un resultado específico, ya sea el resultado de una suma, el producto de una multiplicación, o la conversión de un número compuesto, en el producto de sus factores primos, como veremos adelante. En la enseñanza, esta metodología tiene la ventaja que el

[4] Ver mis notas de epistemología en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Dedekind%20y%20los%20Numeros%20Reales.pdf

estudiante no sale de contexto mientras realiza el proceso; inicia con el planteamiento de la operación aritmética y continua a renglón seguido con los pasos del proceso hasta llegar a un resultado.

La definición que sigue se enmarca en un estilo similar al que Gottlob Frege usa para definir el concepto de número.

Definición alternativa de los números naturales como clases de equivalencia

Definición 1. Definimos al número natural de cifras, $(a_n a_{n\text{-}1} \ldots a_1 a_0)$ como la familia de polinomios:

$$\mathbf{\Omega} = \{\sum_{j=0}^{j=n} b_{n-j} x^{n-j}, \text{ donde cada par de polinomios } p, q, \text{ satisface } p(10) = q(10)\} \qquad \mathbf{(**)}$$

Los coeficientes $b_{n\text{-}j}$ están ligados por la propiedad sintáctica (*). La clase de equivalencia Ω, así definida, empieza con el polinomio estándar y termina con el mismo número $(a_n a_{n\text{-}1} \ldots a_1 a_0)$. Esta definición es semántica, pero intuitivamente clara, por cuanto usa preconceptos tales como: cifras digitales, suma y producto de números en la forma más elemental. En otro trabajo hemos desarrollado en detalle la forma de efectuar las operaciones elementales a través del uso de polinomios [5].

Cada elemento de la clase Ω es equivalente a los demás, módulo el número que origina la clase. En el ejemplo 1, arriba, $2x^3 + 17x^2 + 6x + 3$, y, $2x^3 + 16x^2 +16x + 3$, son dos polinomios distintos, pero es lícito decir que, $2x^3 + 17x^2 + 6x + 3$, y, $2x^3 + 16x^2 +16x + 3$ son equivalentes, módulo (3763). Lo mismo ocurre cuando decimos, $2 \neq 4$, pero es correcto decir: “2 y 4 son equivalentes modulo (2)”. Estas relaciones se denotan como: $2x^3 + 17x^2 + 6x + 3 \equiv 2x^3 + 16x^2 +16x + 3$ (módulo 3763), y, $4 \equiv 2$ (módulo2). Observe que tanto 3763, como 2 pertenecen a la clase a que dan origen.

Otro aspecto de la sintaxis del lenguaje numérico son las reglas o tablas de sumar y multiplicar los dígitos primarios, que aprendemos en los niveles inferiores de la educación elemental. Estas tablas dan la tónica de la sintaxis de las leyes de composición, conocidas como: suma y multiplicación.

Se observará una asociación clara entre los números de 0 a 99, y los polinomios lineales del tipo: $a_1x + a_0$; entre números de 100 a 999 y polinomios cuadráticos de la forma, $a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$; entre números de cuatro cifras y polinomios cúbicos, etc.

[5] Ver mi artículo: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/Sintax_and_Semantics_of_Numerical_Lenguage_at_Elementary_School.pdf

Con el recurso de esta definición alternativa de número natural, y las tablas básicas de sumar y multiplicar, daremos aquí unos cuantos ejemplos de suma y de dos tipos de multiplicación[6].

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	·	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figura 1. Tablas Pitagóricas de sumar y multiplicar las cifras del sistema decimal. A la izquierda la matriz $[a_{ij}]$ da la suma de los dígitos $a_i + a_j$ y a la derecha el producto $a_i \cdot a_j$.

***Ejemplo* 2.** La suma de los números 247 y 964, se realiza secuencialmente sin recurrir a algoritmos fuera de contexto. Se impieza con la representación estándar de los sumandos y se termina con la representación corriente de la suma, como muestra, el siguiente proceso, donde hemos omitido el signo " ≡ ", para no exagerar el rigor.

$247 + 964 = (2x^2 + 4x + 7) + (9x^2 + 6x + 4) = (7 + 4) + (4x + 6x) + (2x^2 + 9x^2) = 11 + 10x + 11x^2 = (x + 1) + x^2 + 11x^2 = 12x^2 + x + 1 = x^3 + 2x^2 + x + 1 = 1211.$

Uno podría dar por terminado el proceso cuando llega a $11 + 10x + 11x^2$, ó, $11x^2 + 10x + 11$, pues al cambiar x por 10 da por resultado 1211. Y más aun, el proceso se puede ir simplificando en la medida en que se adquiere práctica, hasta terminar en el simple esquema: "7 más 4, 11, escribo 1 y llevo 1, 6 más 4, 10, más uno que llevaba 11, escribo 1 y llevo 1, nueve más dos, once, más uno que llevaba 12, escribo doce y obtengo mil doscientos once (1211)".

Multiplicación con números naturales

Entre los tres tipos distintos de multiplicación que se puede definir entre naturales, el primer tipo y el más simple es la llamada "multiplicación por escalar", que consiste en multiplicar un número representado en forma estándar por un escalar (un número escrito en forma corriente). El caso más sencillo ocurre si el escalar es un dígito.

[6] Este tema se ha tocado en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/Sintaxis_Semantica_del_Lenguaje_Numerico_en_la_Escuela_Elemental.pdf

***Ejemplo* 3.** Para multiplicar 9 por 724, multiplicamos 9 por la representación estándar de 724, con el recurso de la propiedad distributiva, como se muestra en seguida.

$9{\cdot}724 = 9(7x^2 + 2x + 4) = (9{\cdot}4) + (9{\cdot}2)x + (9{\cdot}7)x^2 = 36 + 18x + 63x^2 = 3x + 6 + x^2 + 8x + 6x^3 + 3x^2 = 6x^3 + 4x^2 + 11x + 6 = 6x^3 + 5x^2 + x + 6 = 6516.$

La práctica lo lleva a uno, a convertir el anterior algoritmo en el esquema: “9 por 4, 36, escribo 6 y llevo 3, 9 por 2, 18 más 3 que llevaba, 21, escribo 1 y llevo 2, 9 por 7, 63, más 2, 65, escribo 65 y el resultado es 6516”.

Este ejemplo muestra cómo, partiendo de dos factores (*multiplicando* y *multiplicador*), uno encuentra un *producto*. El proceso inverso o *factorización*, busca los factores cuando el producto es conocido. En términos generales el problema de la factorización es muy difícil de resolver, como enfatizaremos más adelante. Sin embargo para el caso considerado en el ejemplo 3, del producto por escalar, la situación no es tan crítica y se reduce a lo que en el álgebra elemental se llama la *extracción de un factor común*, que consiste en buscar en cada sumando de una representación polinómica, un factor común y extraerlo como un escalar.

En este ejemplo uno de los polinomios que representa a 6516 es $36 + 18x + 63x^2$ y aquí, claramente se ve que 9 es factor común de 36, 18 y 63 y por lo tanto puede ser extraído fuera del paréntesis para obtener $36 + 18x + 63x^2 = 9(4 + 2x + 7x^2) = 9{\cdot}724$. En forma similar, un polinomio que representa a 724 es: $6x^2 + 12x + 4$, que tiene a 2 como factor común. Así $724 = 2(3x^2 + 6x + 2) = 2{\cdot}362$. Repitiendo el proceso para 362, encontramos que $362 = 2{\cdot}181$ y consecuentemente, $6516 = 9{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}181 = 2^2{\cdot}3^2{\cdot}181$, queda expresado en sus factores primos, por cuanto que 2, 3 y 181 son primos.

Multiplicación de números de dos cifras.

Multiplicar dos números de dos cifras es equivalente a hallar el producto de dos factores lineales del tipo: $ax + b$, y, $cx + d$, donde a, b, c, d, son dígitos, y por convención, $x = 10$. La multiplicación se hace en cuatro pasos,

1) Se inicia con el producto $b{\cdot}d$ (módulo 10, es decir escribiendo las unidades del producto y reservando las decenas).

2) Se multiplica (d) por (ax) y se suma las decenas del paso 1).

3)Se multiplica (b) por (cx) y se suma el resultado del paso 2). Se escriben las decenas resultantes y se guardan las centenas correspondientes.

4) Se multiplica (cx) por (ax), y, se suman las centenas sobrantes en el paso 3). Se escribe este resultado en seguida de las decenas para completar el producto de los dos números.

Simbólicamente:

$(ax + b)(cx + d) = b{\cdot}d + (ad + bc)x + (ac)x^2.$

***Ejemplo* 4**. Multiplicar los números 37 y 65 usando su representación polinómica. Aquí lo haremos primeramente como si se tratara de producto de polinomios, sin ahorrar ningún paso y luego lo esquematizamos usando los cuatro pasos descritos arriba.

$37{\cdot}65 = (3x + 7)(6x+ 5) = 7{\cdot}5 +5{\cdot}(3x) + 7{\cdot}(6x) + (3x)(6x) = 35 + 42x + 15x + 18x^2 = (3x + 5) + (40x + 2x) + (10x + 5x) + (10x^2 + 8x^2) = (5) + (3x + 2x + 5x) + (4x^2 + x^2 + 8x^2) + x^3 = 5 + 10x + 13x^2 + x^3 = 5 + x^2 + 10x^2 +3x^2 + x^3 = 5 + 14x^2 + x^3 = 5 +10x^2 + 4x^2 + x^3 = 5 + x^3 + 4x^2 + x^3 = 2x^3 + 4x^2 + 5 = 2405.$

El largo proceso anterior es la explicación lógica detallada del esquema: "siete por cinco treinta y cinco, escribo al final 5 y llevo 3, cinco por tres quince más tres que llevaba dieciocho, más, siete por seis cuarenta y dos, da sesenta, escribo cero antes del cinco y llevo seis, seis por tres dieciocho más seis que llevaba da 24, que lo escribo antes que cero cinco y el resultado es 2405. Más simple aún, y como recurso nemotécnico, es el arreglo de la figura donde se muestran los pasos con las flechas; primero en el sentido de las manecillas del reloj y luego en sentido contrario. Los pequeños números en el centro (3 y 6), son los sobrantes en los pasos 2) y 3) que se adicionan como se ha indicado.

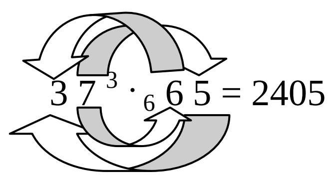

Figura 2. Diagrama del producto 37˙65. La primera flecha multiplica 7˙5, se escribe 5 a la derecha y se lleva 3. La segunda flecha multiplica 5˙3 y suma 3. La tercera flecha multiplica 7˙6 = 42 y suma el resultado anterior 18, quedando 60. Se escribe 0 a la izquierda del 5, y se guarda 6. La cuarta flecha multiplica 6˙3 y suma 6. Este resultado, 18+6=24, se escribe a la izquierda de 05, para obtener el producto 37˙65 = 2405.

Este proceso por su simplicidad y por sus aplicaciones a la verificación de la descomposición factorial es conveniente aprenderlo. Es interesante descubrir que lo que se está haciendo es el producto de dos factores lineales del tipo $ax + b$, que frecuentemente aparecen; en particular tratándose de números menores que 10.000. Los factores lineales cubren el rango entre 2 y 99. Observe que ni a cero, ni a uno los mencionamos aquí, porque aunque están en ese rango, en lo que respecta a factorización, el uno no hace nada como factor y el cero todo lo anula. Esa es otra razón para colocar a este par de números en clase aparte cuando hablamos de la partición de los números naturales en tres clases disyuntas: *compuestos*, *primos* y {0,1}

Descomposición en Factores Primos.

Definición 2. Factorizar el número a, significa, expresar a como producto de, al menos, dos números diferentes de 1 y de a.

La definición de los números naturales como clases de equivalencia nos faculta para particionar el conjunto en subclases con una propiedad común. Es algo similar a lo que ocurre cuando partimos los enteros módulo 2; aparecen dos subclases: los impares y los pares. Todo entero está en una y solo una de estas clases.

Según nuestra definición 1, cada número a, notado en cifras decimales como: $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$ está únicamente en una clase específica de polinomios. Uno de ellos corresponde a su representación estándar,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0 = \sum_{j=0}^{j=n} a_{n-j} x^{n-j}$$, donde los a_i son las cifras decimales de a.

Definición 3. Si en la clase, a la que pertenece un número a, diferente de cero y uno, hay un polinomio $p(x)$, que permite ser factorizado (usando polinomios con coeficientes enteros positivos); diremos que a es *compuesto*. Si ninguno de los polinomios de la clase a la que pertenece a es susceptible de factorización, diremos que a es *primo*.

***Ejemplo* 5**. La clase a que pertenece 4609 contiene al polinomio $41x^2 + 50x + 9$, que factoriza como $(x + 1)(4x^2 + x + 9)$. Por lo tanto 4609 es compuesto. En efecto, $4609 = 11 \cdot 419$.

La definición 3, compartimentaliza a los números naturales en tres clases: la del cero y el uno, la de los números primos y la clase de los números compuestos. Esta definición es interesante por cuanto no hace referencia en ningún momento a la división. La división, entre otras cosas, es una operación espúrea en los números naturales, por cuanto que, dados dos números m y n, no siempre el cociente de ellos está definido en **N**.

Note que si aceptamos la definición 3, el *Teorema Fundamental de la Aritmética*, queda tácitamente inmerso en la definición. Pues la definición, afincada en el anillo euclidiano de los polinomios, garantiza que los números compuestos se pueden expresar univocamente como producto de primos en una sola forma, salvo el orden de los factores.

La importancia de esta definición además de lo dicho, radica en la posibilidad de enunciar el siguiente criterio de primalidad, no considerado, ni estudiado en la historia de las matemáticas, hasta donde llega el conociemiento del autor.

Un Criterio de Primalidad. El número $a = (a_3 a_2 a_1 a_0)$, [cuyos dígitos decimales son a_3 , a_2 , a_1 , a_0 , en ese orden] tiene la forma estándar dada por:

$$a = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

Entre los polinomios de la clase módulo a, tendremos el polinomio cuadrático $(a_3 a_2)x^2 + a_1 x + a_0$.

Si ninguno de los polinomios de la clase que resultan de disminuir, uno a uno, el coeficiente de x^2 hasta llegar a $[(a_3 a_2)/2]$ y sus equivalentes del mismo grado, es factorizable, entonces a es primo. Aquí el símbolo $[y]$ representa el mayor entero menor o igual que y. De lo contrario el número a es compuesto y al final del proceso aparecen sus factores primos.

El proceso que genera este criterio de primalidad, busca factores lineales y/o cuadráticos para descomponer el número *a* como un producto. Este criterio funciona bien para números menores que 10.000. Puede afirmarse que en este rango están los números que usualmente tomamos de ejemplo en el salón de clase.

Los primeros candidatos a ser factores primos de *a*, son: 2, 3, 5 y 7, y ellos se pueden detectar por criterios simples como:

Criterio de Paridad (Un número es múltiplo de dos si termina en cero o cifra par),

Criterio de Triplicidad (Un número es multiplo de tres si la suma de sus cifras es múltiplo de tres),

Criterio de Pentacidad (Un número es múltiplo de cinco, si termina en cero o en cinco) y

Criterio de Septimicidad (Un número es múltiplo de siete si al descomponer su polinomio estandar se encuentra sumandos sucesivamente múltiplos de siete).

Los anteriores criterios se convierten en la primera criba de factores lineales, para separar primos de compuestos. Al pasar por esta criba, en **N** no quedan múltiplos de 2, de 3, de 5, ni de 7.

Miremos algunos ejemplos.

***Ejemplo* 6**. Determinar si el número 5293 es primo o compuesto.

El polinomio estándar asociado a 5293 es $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 9x + 3$ que puede reducirse por la propiedad sintáctica (*) a: $Q(x) = 52x^2 + 9x + 3$, que se puede transformar secuencialmente en:

$52x^2 + 9x + 3 = 51x^2 + 19x + 3 = 50x^2 + 29x + 3 = 49x^2 + 39x + 3 = 48x^2 + 49x + 3 = 47x^2 + 59x + 3 = 46x^2 + 69x + 3 = 45x^2 + 79x + 3 = 44x^2 + 89x + 3 = 43x^2 + 99x + 3 = 42x^2 + 109x + 3$.

Hasta este punto no hemos hecho otra cosa que, bajar el coeficiente cuadrático de uno en uno usando (*). El propósito de este procedimiento es llegar a un polinomio que permita ser factorizado, ya sea, como dos factores lineales, o, uno lineal y el otro cuadrático. La idea es hallar a través de los métodos tradicionales de factorización de polinomios cuadráticos los coeficientes de los respectivos factores.

En el proceso anterior, con alguna práctica, uno puede ahorrarse la escritura de algunos polinomios que a simple vista no se dejan factorizar; como es el caso cuando, el coeficiente cuadrático es primo y cercano a cincuenta, como ocurre con 47 y 43. A partir del paso anterior cambiamos ligeramente el procedimiento, por cuanto que el producto del coeficiente cuadrático por el término independiente ya no puede igualar al coeficiente lineal *x*. Como el producto de dos números temina en 3, sólo cuando los factores terminan en 1 y 3, ó, 7, 9, podemos ensayar cambiando a 3 por $7 \cdot 9 = 63$, para lo cual bajamos el coeficiente de *x* de 109 a 103, para obtener los 6*x* que hace falta para llegar a 63. De tal manera que el proceso sigue así:

$42x^2 + 109x + 3 = 42x^2 + 103x + 6x + 3 = 42x^2 + 103x + 7·9 = 7·6x^2 + 103x + 7·9 = 7·6x^2 + 49x + 54x + 7·9 = 7x(6x + 7) + 9(6x + 7) = (6x + 7)(7x + 9)$.

Volviendo a la notación decimal obtenemos los factores 67 y 79. Esto muestra que: $Q(x) = 52x^2 + 9x + 3 = (6x + 7)(7x + 9)$. Por lo tanto 5293 = 67·79, es un número compuesto.

***Ejemplo* 7**. Hallar los factores primos de 2310. Este es un tipo de número, en la categoría de los que llamo *fieles*, o que están en el centro de la balanza, donde penden dos primos gemelos. Estos números, (excepto **4**) siempre son múltiplos de 6 y acompañan a cada par de primos gemelos; **6**, **12, 18**, …, están entre los pares de primos gemelos: 5,7; 11,13; 17,19; etc.

Sobre el signo igual hemos escrito el criterio que se usa para justificar cada factorización.

$2310 = 23x^2 + x \overset{\textit{Criterio de Paridad}}{=} 2(11x^2 + 5x + 5) \overset{\textit{Criterio de Triplicidad.}\text{(La suma de los digitos es múltiplo de tres)}}{=} 2·3(3x^2 + 8x + 5) \overset{\textit{Criterio de Pentacidad}\text{(El número termina en cinco)}}{=} 2·3·5(7x + 7) \overset{\textit{Criterio de Septimicidad}\text{(Sumandos, sucesivamente múltiplos de siete)}}{=} 2·3·5·7(x + 1) = 2·3·5·7·11$.

Lo anterior muestra a 2310 como el producto de los primeros cinco números primos. Es un número fiel por cuanto que 2310 − 1 = 2309, y, 2310 + 1 = 2311, son ambos números primos y así primos gemelos.

En particular estos números fieles (los llamo de tipo I), se caracterizan por tener como factores a los primeros números primos o a sus potencias en sucesión. No todos los productos de primos en sucesion son fieles, como es el caso de 30.030 = 2·3·5·7·11·13, que no es un número fiel; pero $2·3·5·7·11·13^2$, si lo es y de tipo I, acompañando a los primos gemelos, 390389 y 390391.

En general, los números fieles son "escasos". No se ha podido demostrar aún, que sean finitos o infinitos. Ellos están ligados al problema de la infinitud de los primos gemelos. Si pudieramos probar que hay infinitos números fieles, quedaría probada también la infinitud de los pares de primos gemelos. Como deciamos en la introducción, Yitang Zhang probó en 2013 que hay infinitos baches donde aparecen pares de primos (no necesariamente consecutivos, como los primos gemelos) con una separación no mayor de 70.000.000. Este último guarismo se ha venido disminyendo[7], pero llegar a 2, que es el caso de los primos gemelos, no parece fácil según opinan los expertos. Al menos no, con la teoría de que hoy se dispone.

***Ejemplo* 8**. Decidir si el número 2213 es primo o compuesto.

El polinomio cuadrático derivado de 2213 es $22x^2 + x + 3$. Iniciando con este polinomio y disminuyendo de uno en uno, el coeficiente cuadrático del polinomio, hasta [22/2] = 11, hallaremos, usando la propiedad sintáctica, las siguientes equivalencias módulo 2213:

---

[7]Más exactamente a comienzo de este año se anunció que: $\liminf(p_{n+1} - p_n) \leq 600$. Ver: *Maynard, J.* **Small gaps between primes.** Annals of Mathematics. Volume 181-1. Pages 383-413. 2015

$2213 = 22x^2 + x + 3 = 21x^2 + 11\,x + 3 = 20x^2 + 21x + 3 = 19x^2 +31x + 3 = 18x^2 + 41x + 3 = 17x^2 + 51x + 3 = 16x^2 + 55x + 63 = 15x^2 + 65x + 63 = 14x^2 + 75x + 63 = 13x^2 + 85x + 63 = 12x^2 + 95x + 63 = 11x^2 + 105x + 63.$

Ninguno de los polinomios en el anterior proceso es factorizable, y así, 2213 es primo.

El valor numérico, cuando $x = 10$, de todos los polinomios anteriores es 2213 y esa es la razón por la que decimos que son equivalentes módulo 2213. El proceso termina con 11 como coeficiente cuadrático, porque lo que realmente se busca en todo el procedimiento, es dos números que al multiplicarlos dén como resultado el producto del coeficiente cuadrático por el término independiente, y que, su suma sea el coeficiente de x, y es precisamente a partir de este punto que el producto empieza a ser menor que el coeficiente de x y en consecuencia los números buscados no podrán darse.

En las igualdades anteriores algunos pasos pueden omitirse sin alterar el proceso, como es el caso en que el coeficiente cuadrático sea primo y puede uno mentalmente comprobar que no satisface el requerimiento de factorización.

El Caso de la División.

Decíamos antes que la división en los números enteros, en general, no es cerrada, en el sentido que, dados dos enteros exista un tercero que sea el cociente de esos números. Lo más cercano a eso es, el algoritmo de la división, que garantiza que dados dos enteros D y d, con $d \neq 0$, existe enteros c, r, tal que, $D = cd + r$, y, $0 \leq r < d$.

El algoritmo de la división es un proceso heredado de la cultura griega, motivado en razones filosóficas más que prácticas y pienso que no ayuda mucho a hacer de las matemáticas un tema atractivo en el aula de clase. En otros trabajos[8] he propuesto estudiar, antes que la división, la función lineal y con ello introducir el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$. Es en este conjunto, donde la división puede explicarse como operación cerrada.

El criterio de primalidad, expuesto arriba, podría extenderse a números mayores que 10.000, introduciendo por supuesto factores cúbicos del tipo: $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, y mayores. Sin embargo el criterio vale en general como criterio de razón suficiente para números mayores. Si en el proceso aparecen factores lineales o cuadráticos, el número a no es primo, sin embargo el hecho de que no aparezcan, no significa que necesariamente a tenga que ser primo. La extensión de este criterio de primalidad será tema para otra ocasión. En otro trabajo[9] hemos mostrado cómo factorizar algunos números mayores a 10.000.

---

[8] Ver por ejemplo mis notas de epistemología en:
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/El%20problema%20de%20la%20Inconmensurabilidad..pdf

[9] Ver:
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/Beginning_Abstract_Algebra_at_Elementa

Otros temas interesantes, a los que el enfoque aquí propuesto permite un acercamiento, son los relacionados con el llamado *Último Teorema de Fermat* (UTF), y el *Problema de Beal* de los cuales quiero hacer un mínimo recuento antes de terminar esta exposición.

Último Teorema de Fermat.

La versión que presento, se ha adaptado al enfoque linguistico dado aquí, donde la sintaxis propuesta, nos permite ver el problema, fundamentalmente como un problema de factorización, en lugar de un problema de existencia de ternas (x , y , z) que satisfagan la ecuación diofantina $x^n + y^n = z^n$.

Cuando Andrew Wiles propuso la solución a este problema, algunos matemáticos, entre ellos, Paul Ërdos, creían que podría existir otra prueba alternativa del UTF, usando sólo la teoría elemental de números y pienso que, posiblemente, a través de una concepción nueva de ver los números naturales como clases, podría abrirse una brecha para atacar el problema en forma elemental.

Formulacion del Ultimo Teorema de Fermat en términos de factorización.
Para números naturales diferentes de 0 y 1, y, n > 2, el binomio $x^n + y^n$ *no es factorizable como producto de n factores iguales*.

Nótese que, para $n = 2$, si es posible encontrar dos factores iguales para el binomio $x^2 + y^2$. El ejemplo más sencillo es escoger, $x = 3$, $y = 4$, para encontrar que, $3^2 + 4^2$, factoriza como 5×5. En este caso hay infinitas soluciones, algunas de rancio origen como las que aparecen en la tablilla Plimpton 322, originadas en Babilonia en el II milenio antes de la era actual.

La historia del UTF es rica e interesante. Prácticamente termina con la prueba dada por Andrew Wiles de la Universidad de Princeton en los años de 1990, alrededor de cuatrocientos años, después de la formulación del problema por Pierre de Fermat (1604-1665). La solución no es nada elemental por cuanto reposa en resultados profundos de la geometría algebraica, entre ellos, en la conjetura de Taniyama-Shimura-Weil.

Al dia de hoy, una prueba elemental del UTF, no se conoce. Una prueba elemental sería aquella que repose solamente en la teoría elemental de números, descartando teoría analítica de números, geometría algebraica o áreas afines. Lo anterior muestra que, del UTF queda aun, historia por contar.

El problema de Beal

El problema de Beal tiene una historia reciente. Andrew Beal, un matemático aficionado y propietario de un gran banco en Texas, propuso el problem en 1997 al que adosó un premio inicial de US$5.000. Sin embargo, en parte creo, por no haber sido resuelto, aumentó el premio en 2013, a US$1.000.000 y designó un comité de la *American Mathematical*

---

ry_School.pdf y
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/aritmeticaespectronumerosnaturales.pdf

Society para administrar el capital y entregar el premio según las condiciones establecidas. Detalles y condiciones pueden leerse en distintas fuentes[10]. Beal quizo emular a Paul Wolfskehl, quien en 1908 ofreció un premio de 100.000 marcos alemanes a quien resolviera el UTF.

El problema de Beal es una generalizacion del UTF, en donde los exponentes de las potencias no son necesariamente iguales. Puede establecerse en los siguientes términos:

Problema de Beal. *Si* $A^x + B^y = C^z$*, donde* A, B, C, x, y, z *son enteros positivos con* x, y, z, *todos mayores que 2, entonces* A, B *y* C, *deben tener un factor común*.

El caso, $3^3 + 6^3 = 3^5$, no es un contraejemplo por cuanto que, las bases de las potencias tienen el factor común 3.

El problema en lenguaje de factorización, se leería:

Si $A^x + B^y$ es factorizable como z factores iguales a C, con, A, B, C, x, y, z, enteros positivos y además, x, y, z; todos mayores que 2, entonces A, B, y, C, deben tener un factor común.

Notas preparadas para una charla en el *Encuentro Internacional de Matemáticas 2015*. Barranquilla, Colombia.

Primera Versión, con enmiendas y correcciones (Posiblemente no todas): Noviembre de 2015

[10] Ver por ejemplo: http://www.ams.org/profession/prizes-awards/ams-supported/beal-prize-rules