Aritmética en el Espectro de los Números Naturales a través de veinte ejemplos[1]

Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío.***

"Las matemáticas son una disciplina que demanda imaginación y más aun, fantasía." John Stillwell[2]

"No es necesario ser un genio para desarrollar trabajo creativo." **Gian-Carlo Rota**[3]

"Los primeros asomos al entendimiento matemático en el hombre civilizado fueron de carácter combinatorio." **Gian-Carlo Rota**

Resumen: En este artículo introducimos el concepto de *espectro* asociado a un número natural con cuyo recurso se puede hacer una aritmética paralela a la de las cuatro operaciones, auque mucho más simple y razonada. Tras este recurso reposa el anillo de los polinomios el que se introduce de manera natural a través de la representación de los números usando un sistema de base x, para x entero mayor que uno.

Abstract: In this paper we introduce the concept of *spectrum* associated to natural numbers. Using this concept we can create a parallel arithmetic for the four elementary operations, however more simple and comprehensible. At the background of this approach remains the ring of polynomials which is introduced through the representation of numbers using a basis x, where x is an integer greater than one.

0 - Introducción.

Estas notas no son más que un asomo a un posible enfoque relacionado con la concepción de que las operaciones básicas de los números naturales se pueden estudiar en lo que yo llamo el espectro de los números naturales. La dimensión de mi ignorancia no me permite percibir hasta donde llega su novedad. Por su carácter elemental lo más seguro es que este enfoque haya sido aplicado en otras ocasiones a lo largo de la historia

[1] Primer borrador de un trabajo que esperaba presentar en el Congreso Colombiano de Matemáticas a celebrarse en Bucaramanga. Corresponde a la tercera parte de una secuencia de artículos sobre el mismo tema, iniciada con, *El Poder del Dos*, y continuada con, *La Educación Matemática como una forma de Matemáticas Aplicadas*, que aparecen en:
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias.htm

[2] Tomada del prefacio del libro: Stillwell, J. *Yearning for the Impossible. The Surprising Truths of Mathematics.* A K Peters, Ltd. Wellesley. USA, 2006.

[3] Las frases de Gian-Carlo Rota son tomadas de la Web.

de las matemáticas. Lo más cercano al tema, hasta donde sé, es lo relativo a los logaritmos, que llevan la multiplicación a la suma en los logaritmos para regresar a los números en forma de un producto. La propuesta que se deriva de este enfoque tiene que ver con la implementación durante la educación primaria del enfoque binario con el fin de que las operaciones básicas de la aritmética se han fácilmente comprensibles y que se deje lo menos, al recurso de la memoria. El estudio del sistema binario busca complementar el sistema decimal a fin de introducir tempranamente conceptos matemáticos, que como los polinomios, nos llevan a territorios avanzados que normalmente no se mencionan en la educación primaria.

Desde la edad media, más precisamente desde que llegó a la cultura occidental la numeración hindú arábiga con su propia algoritmia, seguimos enseñando a nuestros niños la misma aritmética y en general las mismas matemáticas, como si ellas se hubieran congelado en el tiempo. Las matemáticas de hoy tienen una riqueza y vastedad que ya se hace imposible, hasta para las mentes más brillantes, tener un dominio universal de sus inmensos contenidos. La belleza de grandes regiones en ellas y lo sorprendente de sus magníficos resultados permanecen ocultos a la juventud porque la educación matemática no ha tenido, ni la entereza, ni el compromiso con la sociedad de poner sus contenidos a tono con la evolución y desarrollo de las matemáticas de los últimas dos centurias.

Para empezar, digamos que la representación de los números usando los numerales en base diez, es herencia de la cultura árabe y se ha mantenido sin mayor cambio por más de mil años, o al menos desde que Leonardo Fibonacci (1170-1250), en 1202 publicó su famosa obra *Liber Abaci*, que popularizó en occidente el sistema decimal. Tenemos la impresión de que el sistema decimal fuera la única y más conveniente forma de ver los números, desconociendo que hay otras formas quizás tan buenas o pedagógicamente mejores que este mismo sistema.

Comencemos diciendo que la forma de escribir linealmente los números es herencia árabe. Por ejemplo, cuando escribimos el número tres mil ciento veinticuatro, seguimos un orden lineal de izquierda a derecha: 3 1 2 4, pero cuando pequeños, nuestra mente para apreciar su magnitud, procede en forma inversa, de lo pequeño a lo mayor, es decir: 4 unidades, 2 decenas, 1 centena, 3 millares. Como en la escritura árabe se escribe y se lee de derecha a izquierda, para el niño árabe le es razonablemente fácil leer los números escritos en esa forma, pero para el niño nuestro es difícil valorar la magnitud de un número, y más aun leerlo, cuando éste está conformado por muchas cifras. Si el número anterior lo escribiéramos 4 2 1 3, el niño lo leería siguiendo el orden natural de lectura de izquierda a derecha, 4 unidades, 2 decenas, 1 centena, 3 millares, lo que significaría para el niño un ahorro de esfuerzo mental y una comprensión plena del tamaño del número. Este caso simple muestra que, hasta en las partes más elementales de las matemáticas se puede pensar alrededor de posibles cambios que, a la luz de la tradición, podrían resultar un ex abrupto.

Los Números Naturales representados por Polinomios.

Un polinomio en su representación más simple es una combinación de sumas y productos. Los ejemplos más a mano de estas expresiones aparecen en la representación posicional de un número en una base dada *x*. Verbigracia, si $x = 10$, el numeral 2387, corresponde al número

$$7\times x^0 + 8\times x^1 + 3\times x^2 + 2\times x^3, \qquad [*]$$

Donde x^0, x^1, x^2, x^3 están para representar las unidades, las decenas, las centenas y las unidades de mil sucesivamente. Las cantidades a la izquierda de la letra *x* se denominan cifras y en este caso, cuando $x = 10$, ellas pueden tomar valores en {0, 1, 2,…, 9}. La forma de representar los números es, en general, a través de expresiones polinómicas como la mostrada en [*]. Sin embargo esta representación no es única, pues va a depender de la base que se escoja. Si cambiamos a base dos, digamos tomando $x = 2$, el número 2387 estará representado como suma de potencias de dos,

$$100101010011 = 1\times x^0 + 1\times x^1 + 1\times x^4 + 1\times x^6 + 1\times x^8 + 1\times x^{11} = 1 + 2 + 16 + 64 + 256 + 2048 = 2387$$

Aquí las cifras se escogen en el conjunto {0,1}. Como se ve, en cada numeral, o sea en la representación simbólica de un número, va implícita una serie de operaciones que normalmente no se explican en el curso de la enseñanza de la aritmética elemental. Lo que buscamos en nuestra metodología de la enseñanza de la aritmética es precisamente que el niño desde la más temprana edad entienda e interiorice la noción de valor numérico de los numerales a fin de que pueda entender racionalmente el por qué de las operaciones básicas, que a él se le enseña.

Si el niño comprende que con cada número está asociado un polinomio, no le quedará difícil entender la razón de la suma o el producto de dos números. Más concretamente, cuando se suman dos números, estamos sumando cosas de distinto tamaño. Por ejemplo, sumar 37 a 84, significa que a: 8 decenas, 4 unidades, se debe sumar 3 decenas y 7 unidades, lo que simbólicamente se puede escribir:

$$84 + 37 = (4\times x^0 + 8\times x^1) + (7\times x^0 + 3\times x^1).$$

Aprender a sumar, será entonces, aprender a sumar polinomios reduciendo, cada vez que sea del caso, las respectivas unidades de cada orden: primero, $(4\times x^0 + 7\times x^0) = (4 + 7)\times x^0 = 11\times x^0 = (10 + 1)\times x^0 = 10\times x^0 + 1\times x^0 = (1\times x^1)\times x^0 + 1\times x^0 = 1\times x^{1+0} + 1\times x^0 = 1\times x^1 + 1\times x^0$, y luego, $(8\times x^1) + (3\times x^1) = (8 + 3)\times x^1 = 11\times x^1 = (10 + 1)\times x^1 = 10\times x^1 + 1\times x^1 = 1\times x^1\times x^1 = 1\times x^{1+1} + 1\times x^1 = 1\times x^2 + 1\times x^1$. Por lo tanto

$$84 + 37 = (1\times x^1 + 1\times x^0) + (1\times x^2 + 1\times x^1) = 1\times x^2 + 2\times x^1 + 1\times x^0 = 121.$$

En términos generales, cuando se dan dos polinomios *a* (*x*) y *b* (*x*), definidos por:

$a(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i}x^{n-i}$, *y*, $b(x) = \sum_{j=0}^{j=l} b_{l-j}x^{l-j}$, la suma de los mismos se expresa como:

$$a(x) + b(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i}x^{n-i} + \sum_{j=0}^{j=l} b_{l-j}x^{l-j} = \sum_{k=0}^{k=m} (a_{m-k} + b_{m-k})x^{m-k},$$

con los ajustes apropiados a que haya lugar cuando los grados de los polinomios no coinciden.

En forma análoga, la multiplicación estará asociada a la multiplicación de polinomios.

La multiplicación entre polinomios sigue el patrón de multiplicar cada sumando del multiplicador por cada sumando del multiplicando, se suman luego los resultados teniendo en cuenta que, la adición se hace módulo la base en que se esté trabajando (si es diez, reduciendo las unidades a decenas, las decenas a centenas, etc., cada vez que sea el caso).

En general también, si $a(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i}x^{n-i}$, y, $b(x) = \sum_{j=0}^{j=l} b_{l-j}x^{l-j}$, definimos:

$$a(x)b(x) = \left(\sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i}x^{n-i}\right) \left(\sum_{j=0}^{j=l} b_{l-j}x^{l-j}\right) = \sum_{i+j=0}^{n+l} \left(\sum_{k=0}^{i+j} a_k b_{(i+j)-k}\right) x^{(i+j)-k} ,$$

donde a_i, y, b_j son las cifras del sistema; específicamente si la base es 10, ellas se toman en {0, 1,…,9} y si es 2, en el conjunto {0, 1}.

Por ejemplo, 13 × 25 = $(3\times x^0 + 1\times x^1) \times (5\times x^0 + 2\times x^1) = (3 \times 5)\times x^0 \times x^0 + (3 \times 2\times x^0 \times x^1) + (1\times 5\times x^0 \times x^1) + (1\times 2\times x^1 \times x^1) = 15\times x^0 + 6\times x^1 + 5\times x^1 + 2\times x^2 = (10 + 5) \times x^0 + 6\times x^1 + 5\times x^1 + 2\times x^2 = 5\times x^0 + 1\times x^1 + 11\times x^1 + 2\times x^2 = 5\times x^0 + 12\times x^1 + 2\times x^2 = 5\times x^0 + 2\times x^1 + 1\times x^2 + 2\times x^2 = 5\times x^0 + 2\times x^1 + 3\times x^2 = 325$.

Lo laborioso de los procesos anteriores, podría espantar a cualquiera. Sin embargo lo que pretendemos aquí es justificar cada paso, basados en la aritmética de los coeficientes y exponentes de los polinomios involucrados, hasta llegar al resultado final. En la medida en que nos familiaricemos con el tema, los procesos se van simplificando a fin de llegar más rápido a los resultados deseados. Lo anterior busca fundamentalmente una motivación para estudiar los polinomios como soporte de la aritmética de los números naturales. Sabiendo que los números naturales se pueden representar en forma binaria, la justificación de todos los procesos se va a simplificar, por cuanto que, a cada número está asociado un polinomio binario de muy fácil representación, como lo veremos en la próxima sección.

1 – La Aritmética Binaria

Vamos asumir que sólo disponemos de tres símbolos básicos: **0** con la connotación de representar un lugar desocupado en el numeral y de representar además el cardinal del conjunto vacío; **1**, que simboliza la unidad, y la literal *x* que al final determinará la base del sistema en que se va a representar cada número (en nuestro caso la base es 2). Definamos a partir de estos símbolos dos operaciones + y ×, de acuerdo a las siguientes tablas:

+	0	1	×	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	x	1	0	1

Tablas de sumar y multiplicar básicas, a partir de las cuales se originan los polinomios asociados a los números naturales 0, 1, 2,…

La tabla nos dice que $0 + 0 = 0\times1 = 1\times0 = 0\times0 = 0$; $1\times1 = 0 + 1 = 1 + 0 = 1$, y que $1 + 1 = x$. Basados en esta tabla y en los símbolos que allí aparecen debemos extender nuestro conjunto 0, 1, x, hasta convertirlo en un conjunto inductivo isomorfo a los números naturales.

Conjuntos Inductivos.

Tomemos aquí la definición de Bertrand Russell (1872-1970), para quien un conjunto inductivo es un conjunto no vacío, parcialmente ordenado[4] en el cual, cada elemento tiene un sucesor. El ejemplo más trillado es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, donde el primer elemento es 0 y los demás elementos se obtienen adicionando 1, sucesivamente.

Para nuestro caso tomemos a 0 como el primer elemento de nuestro conjunto inductivo. El segundo será $0 + 1$, que según la tabla es 1, el siguiente es $1 + 1 = x$. Continuando así encontramos $(x + 1)$, $(x + 1) +1 = x + (1 + 1) = x + x = (1 + 1)x = x\times x$. Este último elemento lo escribimos simplificadamente como, x^2. Queremos enfatizar que x^2 es el quinto elemento de la lista de nuestro conjunto inductivo. El siguiente es $x^2 + 1$, luego $(x^2 + 1) +1 = x^2 + (1 + 1) = x^2 + x$, y así sucesivamente encontraremos el conjunto

$$\mathbb{B} = \{0, 1, x, x + 1, x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1, x^3, \dots\}.$$

Los elementos de $\mathbb{B}$ los llamaremos aquí *polinomios binarios* (diferentes en general a los que se estudian en otras áreas de las matemáticas). El conjunto $\mathbb{B}$ es inductivo porque por construcción cada elemento tiene su sucesor y es parcialmente ordenado ya que la relación $\leq$ es transitiva en $\mathbb{B}$ y porque si, a y b están en $\mathbb{B}$ con, $a \leq b$, y, $b \leq a$, entonces, $a = b$.

Puesto que $\mathbb{N}$ es también un conjunto inductivo y comparte con $\mathbb{B}$ los elementos 0 y 1, los conjuntos son isomorfos, en el sentido de que se puede establecer entre ellos una correspondencia uno a uno y sobre y se preservan las operaciones de suma y producto. Más aun, si sustituimos a x por 2, $\mathbb{B} = \mathbb{N}$. Esto quiere decir que $\mathbb{B}$ es otra forma de representar los números naturales. Usar $\mathbb{B}$ en lugar de $\mathbb{N}$ nos va a permitir usar los recursos que ofrece el álgebra de polinomios para estudiar ciertas propiedades de los números naturales, entre ellas la divisibilidad y otras formas alternas de hacer aritmética.

[4] Para una definición de orden parcial, ver mis conferencias de Epistemología de las matemáticas en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Los%20N%C3%BAmeros%20Naturales%20y%20el%20Concepto%20de%20Buena%20Ordenacion.pdf .

2 – Propiedades que se desprenden de la definición de $\mathbb{B}$.

Aquí supondremos que estamos ya familiarizados con los axiomas básicos de los números enteros, como son las propiedades asociativa y conmutativa para suma y producto, que existen elementos neutros para suma y producto y que se cumple la propiedad distributiva como puente entre las dos operaciones internas. Omitiremos además el signo $\times$ cuando se da por entendido. También utilizaremos la notación exponencial para simplificar la escritura de los productos repetidos.

Teorema Fundamental. Para todo $n \geq 0$, $x^n + x^n = x^{n+1}$
Demostración. $x^n + x^n = (1)\,x^n + (1)\,x^n = (1+1)\,x^n = (x)\,x^n = x^{n+1}$. Probemos usando inducción completa que el enunciado vale para todo $n \geq 0$.

Puesto que $x^0 + x^0 = 1 + 1 = x = x^1$, la primera condición para $n = 0$, se cumple. Debemos probar que si el enunciado es válido para un $k > 0$, fijo, será también válido para $n = k + 1$.

Asumamos que se cumple para $n = k$, es decir, $x^k + x^k = x^{k+1}$. Multiplicando a ambos lados de la igualdad por x, tenemos: $x(x^k + x^k) = x(x^{k+1})$, de lo que se sigue que: $xx^k + xx^k = x^{(k+1)+1}$, que es lo mismo que, $x^{k+1} + x^{k+1} = x^{(k+1)+1}$. Esta expresión última es la condición cuando $n = k + 1$. Por lo tanto, ésta propiedad vale para todo $n \geq 0$.

Este teorema es la espina dorsal de todo lo que sigue, por cuanto la aritmética de los espectros que definiremos más adelante se fundamentará en esta característica de los polinomios binarios.

Corolario 1. $x^{n+1} = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1 + 1$.

Demostración. Por la tabla que define la suma, sabemos que $1 + 1 = x$. Así que el miembro de la derecha de la igualdad se irá reduciendo paulatinamente, primero con $x + x = x^2$, luego con $x^2 + x^2 = x^3$, hasta llegar a $x^n + x^n = x^{n+1}$, que es exactamente el miembro de la izquierda. Por inducción matemática se prueba que esta proposición vale para todo $n \geq 0$.

Corolario 2. $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n = x^{n+1} - 1$.

Demostración. Basta con pasar el 1 final que esta sumando en la derecha a restar en el miembro de la izquierda de la igualdad en el corolario 1. Esto muestra que en $\mathbb{B}$ la suma de las potencias sucesivas de x, de 0 hasta n, se calcula fácilmente tomando la potencia $n + 1$ y restando 1.

Corolario 3. $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$. En particular si $n = 2$, $(x+1)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}x + \binom{2}{2}x^0 = 1x^2 + 2x + 1 = x^2 + xx + 1 = x^2 + x^2 + 1 = x^3 + 1$. Aquí, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, corresponde a los coeficientes binomiales.

Demostración. La demostración sigue el patrón de las pruebas por inducción matemática y las propiedades de los coeficientes binomiales.

La representación binaria de los números naturales permite a simple vista decidir si un número es *par* o *impar*; según que termine en cero o en uno respectivamente. Más aun podemos ver, si es divisible por 3, por 5, y con ciertos arreglos, determinar si el número es divisible por un número primo determinado.

3 – Espectro de un número natural.

Previa a la invención del computador, la forma simplificada de hacer cálculos científicos fue el método de los logaritmos. Los logaritmos fueron uno, entre los inventos de un personaje excéntrico y excepcional, de nacionalidad escocesa llamado John Napier (1550-1617). La motivación de Napier para inventar los logaritmos pudo estar en el proceso de llevar la multiplicación, que es un proceso dispendioso, a un proceso más manejable como es la adición de números. Como tendremos la oportunidad de ver, lo que es multiplicación entre números se convierte en suma de exponentes. Y hacia allá apuntamos: convertir la multiplicación en un proceso que pueda reducirse a suma de potencias de 2, las que son fáciles de calcular. Aunque el método de los logaritmos desapareció con el advenimiento del computador, buscamos a través del recurso de los exponentes (afines a los logaritmos) una metodología nueva que permita llevar al aula métodos racionales de aprendizaje de los algoritmos básicos de la aritmética.

Al igual que los elementos químicos pueden identificarse por su espectro de radiación, los números naturales pueden también caracterizarse por un arreglo o disposición de ciertos números que aquí llamaré el espectro del número y que definiremos más adelante. Cuando un número está representado por un polinomio binario, él puede identificarse por los exponentes del polinomio en forma unívoca. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1. El polinomio binario $1 + x^3 + x^5 + x^6$, está asociado al número 105 que tiene representación binaria 1101001. Las posiciones del dígito 1 en el numeral, determina la potencia de x que está presente en el polinomio binario. El uno a la derecha en el numeral 1101001, indica que la potencia x^0 está presente; el 1 en el lugar cuarto de derecha a izquierda indica la aparición de la potencia x^3.También los 1´s que ocupan las posiciones sexta y séptima garantizan la aparición de las potencias x^5 y x^6. Esto significa que al explicitar los exponentes, las potencias quedan determinadas. Concretamente, el arreglo <0,3,5,6> indica que el polinomio binario asociado, tiene exactamente las potencias x^0, x^3, x^5 y x^6, las demás potencias son nulas y aparecen en el numeral como ceros. Esto permite identificar a un número con los exponentes de su polinomio binario. Así el número 105, en base decimal, se puede identificar por el arreglo <0,3,5,6>, asociado a los exponentes de su expansión binaria. Este arreglo de exponentes lo llamaré aquí, el **espectro** del número 105.

Ejemplo 2. A la inversa del ejemplo anterior, podemos asociar a cada arreglo de enteros no negativos un número natural. Si damos el arreglo <1,4,7> estamos pensando en el polinomio $x^1 + x^4 + x^7$,o lo que es lo mismo, el número binario 10010010, que corresponde al número 2 + 16 + 128 = 146 en representación decimal, y por lo tanto el espectro de 146 es <1,4,7>.

Ejemplo 3. Si el espectro de un número *n* corresponde a la sucesión, 0,1,2,…,*k*-1, *k*; el número en forma digital es 11…111, con *k* +1 dígitos, todos iguales a 1, su forma decimal será la expansión

$$\sum_{i=0}^{i=n} 2^{n-i} = 2^n + 2^{n-1} + ... + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Lo anterior es consecuencia del corolario 2. Cuando $k = 5$, $n = 111111 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 2^6 - 1$ = 64 – 1 = 63.

Definición. Si un número natural *n* está asociado al polinomio binario dado por

$$a(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} x^{n-i} ,$$

su espectro *s* se define por $s = Sp(\sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} x^{n-i}) = < n_0, n_1, ..., n_k >$, donde los n_i, $0 \le i \le k$, son los exponentes para los cuales los coeficientes a_{n-i} , no son nulos en la expansión de *n*, dada arriba.

Ejemplo 4. Hallar el espectro de 165.

Para encontrar el espectro, el primer paso es hallar el polinomio binario del número. Esto se logra buscando las potencias sucesivas de dos que pueden estar incluidas en 165. La mayor es 128, luego 32, luego 4 y finalmente 2^0, que es 1. En este caso

$$a(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i} x^{n-i} = x^7 + x^5 + x^2 + x^0 = 128 + 32 + 4 + 1 = 165, \text{ para } x = 2.$$

El espectro es entonces el arreglo de los exponentes que aparecen en el polinomio binario, esto es *Sp*(165) = <7,5,2,0>. Observe la aparición del número cero representando al número 1 en el polinomio binario, por cuanto que $x^0 = 1$. El problema de hallar el espectro de un número se reduce a hallar el polinomio binario asociado a él, y tomar los exponentes en cualquier orden.

Por ser polinomios binarios los involucrados en la definición del espectro, el orden en que los exponentes aparecen, no hace ninguna diferencia, como no la hace el orden en que aparezcan los sumandos del polinomio. En el ejemplo 4, *s* = <7,5,2,0> = <0,2,5,7> = <7,2,0,5> = <5,7,0,2>, etc. Además, por el teorema fundamental visto al principio, una potencia cualquiera como x^n , puede reemplazarse por $x^{n-1} + x^{n-1}$ y viceversa.

Por lo dicho arriba s = <7,5,2,0> = <6,6,5,2,0> = <7,4,4,2,0> = <7,5,1,1,0>, etc., donde en lugar de 7, tomamos 6,6, en lugar de 5 hemos escogido 4,4, etc. De aquí se sigue que el espectro de un número puede darse en muchas formas y en él es posible definir una aritmética binaria, donde lo que es suma en los polinomios, en el espectro es suma de valores iguales con la regla de los exponentes justamente mencionada. Miremos unos ejemplos.

Definición. Si $s = Sp(n) = < n_0,\ldots,n_i,>$, y, $t = Sp(m) = < m_0,\ldots,m_j,>$, la suma de los espectros es:

$$s + t = < n_0,\ldots,n_i, m_0,\ldots,m_j >,$$

es decir la suma de los espectros de m, y, n es la yuxtaposición de los espectros respectivos. Usando el teorema fundamental este espectro se puede reducir a su más simple expresión y esa es la suma de los espectros.

Ejemplo 5. Adicionar 165 y 63, sabiendo que sus espectros están dados por: s = <0,2,5,7>, y, t = <0,1,2,3,4,5> respectivamente.

Recordemos que estos espectros provienen de los polinomios: $x^7 + x^5 + x^2 + x^0$, y, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + x^0$, asociados a los números 165 y 63. El polinomio suma tiene como espectro la yuxtaposición de los respectivos exponentes que al reducirlos a su mínima expresión dan el espectro de este polinomio, asociado a la suma de los números 165 y 63. Simbólicamente esto se expresa:

$s + t$ = <0,2,5,7> + <0,1,2,3,4,5> = <0,2,5,7,0,1,2,3,4,5> = <0,0,1,2,2,3,4,5,5,7> = <1,1,3,3,4,6,7> = <2,4,4,6,7> = <2,5,6,7>. Observe que en la aritmética de los espectros: 0 + 0 = 1; 1 + 1 = 2; 2 + 2 = 3,…, $k + k = k + 1$.

Se sigue entonces que: $s + t$ = <0,2,5,7> + <0,1,2,3,4,5> = <2,5,6,7>. Este último espectro está asociado a

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^2 .$$

Polinomio éste, que corresponde al número 128 + 64 + 32 + 4 = 228, que en efecto es la suma de 165 y 63. En la suma de los espectros usamos coloración para acentuar los sumandos y su suma, respectivamente.

Una consecuencia de lo dicho hasta aquí es que podemos calcular la suma de dos números m y n sumando (modulo sus polinomios binarios) los respectivos espectros y volviendo al polinomio binario de la suma. Simbólicamente, si denotamos por Sp el proceso de hallar el espectro de un número a través de los polinomios binarios $\mathcal{B}$, lo que podemos afirmar es que:

$$\begin{array}{ccccc} Sp(m) & + & Sp(n) & = & Sp(m+n) \\ \mathcal{B}\uparrow & & \mathcal{B}\uparrow & & \mathcal{B}\downarrow \\ m & & n & & m+n \end{array}$$

Así que al tener el espectro de $(m + n)$ podemos encontrar el polinomio binario asociado a él, que al final va a corresponder a la suma de los números dados.

Ejemplo 6. Si los números m y n, ya están dados en forma binaria, el proceso de sumar se hace más fácil. Por ejemplo, si m = 1000111 y n = 1110111, $Sp(m) + Sp(n)$ = <0,1,2,6> + <0,1,2,4,5,6> = <0,1,2,6,0,1,2,4,5,6> = <1,2,3,4,5,7> = $Sp(m + n)$. De donde se sigue que $m + n = x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ = 10111110. Vistos estos números en forma decimal, el proceso daría: $m = 71$, $n = 119$ y $m + n = x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 190$.

Reducir un espectro a su más simple expresión es algo entretenido, es como si se tratara de las fichas de un dominó que caen secuencialmente una tras otra, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7. Sumar los números binarios, m = 1010010, y, n = 101111.

Los respectivos espectros se leen directamente de la expresión binaria: Sp(1010010) = <1,4,6>, y Sp(101111) = <0,1,2,3,5>. Por lo tanto,

$Sp(m + n)$ = <1,4,6,0,1,2,3,5>.

Reducir este espectro a su mínima expresión es juego de niños. La suma (módulo polinomio binario) en el espectro da: 1+1 = 2, 2+2 =3, 3+3 =4, 4+4 = 5, 5+5 = 6, y, 6 + 6 =7. El espectro de la suma es entonces <7,0>, y la suma de los dos números es 10000001. Traducido esto a sistema decimal da: m = 1010010 = 82, y, n = 101111 = 47 y la suma de los dos es: $x^7 + 1 = 128 + 1 = 129$.

Cuando nos situamos en los números naturales, el espectro está conformado por los exponentes en su representación polinómica de base 2, lo que significa que en el espectro sólo aparecen los exponentes asociados a las potencias no nulas que figuran en esa representación. Si se toma la representación binaria de un número el cual tiene sus últimos dígitos iguales a cero, su espectro no mostrará esos dígitos pero estarán sobrentendidos en la magnitud del primer dígito no nulo de derecha a izquierda. Por ejemplo, si n = 1010000, su espectro es <6,4>, lo que significa que el número termina en 4 ceros. En lenguaje decimal: $n = 80 = x^6 + x^4 = 2^6 + 2^4$, dicho en otras palabras, el espectro de 80 es <6,4> o <4,6>.

La sustracción no puede definirse dentro de los espectros pues la aparición de signos negativos en el polinomio, primero, no se refleja en el exponente y segundo la sustracción no es una operación cerrada en los naturales, es decir que la sustracción no siempre es posible. Sin embargo, si el minuendo es mayor que el sustraendo, aun podemos recurrir a los espectros para facilitar el cálculo de la diferencia. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.

Hallemos la diferencia entre 148 y 39 usando sus respectivos espectros, <7,4,2> y <5,2,1,0>. Primero resolvamos el problema usando los polinomios binarios asociados a los dos números.

148 – 39 = $x^7 + x^4 + x^2 - (x^5 + x^2 + x + 1)$. Por el teorema fundamental visto al comienzo, el polinomio minuendo se puede transformar de modo que las potencias del minuendo se anulen en la sustracción.
En efecto, $x^7 + x^4 + x^2 = x^6 + x^5 + x^5 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 + 1$, lo que se puede verificar usando las propiedades de los polinomios binarios. Por lo tanto,

148 – 39 = $x^7 + x^4 + x^2 - (x^5 + x^2 + x + 1) = x^6 + x^5 + x^5 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 + 1 - (x^5 + x^2 + x + 1) = x^6 + (x^5 - x^5) + x^5 + x^3 + (x^2 - x^2) + x^2 + (x - x) + (1 - 1) + 1 = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$ = 64 + 32 + 8 + 4 +1 = 109.

Traducido lo anterior a lenguaje de espectros es (salvo lo intraducible):

148 – 39 = <7,4,2> – <5,2,1,0> = <6,5,5,3,2,2,1,0,0> – <5,2,1,0> = $x^6 + (x^5 - x^5) + x^5 + x^3 + (x^2 - x^2) + x^2 + (x - x) + (1 - 1) + 1 = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$ = <6,5,3,2,0> = 64 + 32 + 8 + 4 +1 = 109.

Como se vio en el ejemplo, la sustracción no se puede hacer en los espectros directamente, pero en los polinomios binarios si, por lo cual concluimos que el paso crucial de la sustracción se puede hacer en los polinomios y luego seguir en el espectro.

4 – La multiplicación vista en el espectro de los factores.

Si la suma de números naturales se ve en el espectro, como suma de potencias iguales, el producto de dos números *m* y *n*, también se puede ver como suma de exponentes en el espectro según las siguientes normas: 1) se suma cada elemento del espectro de *m* con cada elemento del espectro de *n*; 2) se reduce el espectro resultante a su mínima expresión como lo hacíamos para la suma.

Definición. Si $s = Sp(n) = <n_0, \ldots, n_i,>$, y, $t = Sp(m) = <m_0, \ldots, m_j,>$, el producto de los espectros es:

$$s \otimes t = <n_0, \ldots, n_i><m_0, \ldots, m_j> = <n_0 + m_0, \ldots, n_0 + m_j, \ldots, n_i + m_0, \ldots, n_i + m_j>,$$

Ejemplo 9. Multiplicar *m* = 1010010 y *n* = 100001.

Lo primero que debemos hacer es hallar los espectros asociados a *m*, y, *n*. Como los números ya aparecen en binario, sus espectros se leen directamente: *Sp*(*m*) = <1,4,6>, y, *Sp*(*n*) = <0,5>. Vamos a denotar la multiplicación de los espectros como <1,4,6><0,5> y la definimos según los pasos 1) y 2) dados arriba:

<0,5><1,4,6>= <0+1,0+4,0+6,5+1,5+4,5+6> = <1,4,6,6,9,11> = <1,4,6+6,9,11> = <1,4,7,9,11>. Este espectro está asociado al número binario 101010010010. Lo que significaría que:

$$1010010 \times 100001 = 101010010010.$$

Visto el anterior proceso en representación decimal da:

$m = 1010010 = x^6 + x^4 + x^1 = 64 + 16 + 2 = 82$, y, $n = 100001 = x^5 + x^0 = 32 + 1 = 33$.

El producto es entonces:

$82 \times 33 = 101010010010 = x^{11} + x^9 + x^7 + x^4 + x = 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^4 + 2 = 2048 + 512 + 128 + 16 + 2 = 2706$.

La razón de ser del método descrito para multiplicar, radica en la multiplicación de polinomios, para la cual multiplicamos cada sumando del primer factor por cada sumando en el segundo factor y luego reducimos términos semejantes.

Ejemplo 10. Multiplicar 34 por 19 usando los polinomios binarios asociados a estos números.

Los polinomios asociados a 34 y 19 son respectivamente, $34 = 32 + 2 = x^5 + x$, $19 = 16 + 2 + 1 = x^4 + x + 1$. El producto de estos polinomios es:

$(x^5 + x)(x^4 + x + 1) = (x^5)(x^4) + (x^5)(x) + (x^5)(1) + (x)(x^4) + (x)(x) + (x)(1) = (x^9) + (x^6) + [(x^5) + (x^5)] + (x^2) + (x) = (x^9) + [(x^6) + (x^6)] + (x^2) + (x) = x^9 + x^7 + x^2 + x = 2^9 + 2^7 + 2^2 + 2 = 512 + 128 + 4 + 2 = 646$.

Este mismo producto, usando los espectros es <1,5><0,1,4> = <1,2,5,5,6,9> = <1,2,7,9> que corresponde al polinomio, $x^9 + x^7 + x^2 + x = 646$, cuando, $x = 2$. Con esto verificamos el arribo al mismo resultado por los dos caminos, aunque el trabajo en los espectros es más expedito que en los polinomios binarios.

5 – El Espectro de los Números Primos y la Factorización

Los números primos son el eje central de la teoría de números y se constituyen en elementos básicos para representar los números naturales. Euclides en es siglo III A. C. mostró en forma maravillosa que los números primos son infinitos y que todo número natural no primo se puede expresar como producto de primos en una sola forma, salvo el orden de los factores.

Vamos a mostrar aquí varios ejemplos donde, conociendo el espectro de un número dado podemos, a través de la aritmética hasta aquí desarrollada, encontrar sus factores primos. Antes de presentar estos ejemplos vamos a mirar la siguiente tabla de los primeros números primos menores que cien, con su representación polinómica y sus respectivos espectros. Se observa que a excepción de 2 todos los otros primos tienen a cero en su espectro. La razón estriba en que todo primo mayor que dos es impar y así su polinomio tiene a 1 como término independiente lo que fuerza la aparición del 0 en el espectro.

No.	Primo	Polinomio Binario	Espectro
1	**2**	x	<1>
2	**3**	$1+x$	<0,1>
3	**5**	$1+x^2$	<0,2>
4	**7**	$1+x+x^2$	<0,1,2>
5	**11**	$1+x+x^3$	<0,1,3>
6	**13**	$1+x^2+x^3$	<0,2,3>
7	**17**	$1+x^4$	<0,4>
8	**19**	$1+x+x^4$	<0,1,4>
9	**23**	$1+x+x^2+x^4$	<0,1,2,4>
10	**29**	$1+x^2+x^3+x^4$	<0,2,3,4>
11	**31**	$1+x+x^2+x^3+x^4$	<0,1,2,3,4>
12	**37**	$1+x^2+x^5$	<0,2,5>
13	**41**	$1+x^3+x^5$	<0,3,5>
14	**43**	$1+x+x^3+x^5$	<0,1,3,5>
15	**47**	$1+x+x^2+x^3+x^5$	<0,1,2,3,5>
16	**53**	$1+x^2+x^4+x^5$	<0,2,4,5>
17	**59**	$1+x+x^3+x^4+x^5$	<0,1,3,4,5>
18	**61**	$1+x^2+x^3+x^4+x^5$	<0,2,3,4,5>
19	**67**	$1+x+x^6$	<0,1,6>
20	**71**	$1+x+x^2+x^6$	<0,1,2,6>
21	**73**	$1+x^3+x^6$	<0,3,6>
22	**79**	$1+x+x^2+x^3+x^6$	<0,1,2,3,6>
23	**83**	$1+x+x^4+x^6$	<0,1,4,6>
24	**89**	$1+x^3+x^4+x^6$	<0,3,4,6>
25	**97**	$1+x^5+x^6$	<0,5,6>

Tabla de los primeros números primos y sus respectivos espectros.

Decíamos antes que el espectro no cambia si los números que aparecen en él, se reemplazan por dos o más cuya suma reproduzca el mismo número, según la aritmética de los exponentes. Digamos, podemos reemplazar a 5 por 4,4, porque $x^4+x^4=x^5$ en la aritmética binaria, o por, 4,3,2,2, porque, $x^4+x^3+x^2+x^2=x^5$ y así sucesivamente.

Notación. Usaremos dentro del símbolo de espectro “<>” el mismo símbolo para denotar la aparición de un espectro reconocido de un primo y para facilitar la escritura de factores comunes dentro del espectro. Esto permitirá observar a simple vista si un primo aparece como factor en un espectro determinado.

Ejemplo 11. Consideremos el espectro <2,4> correspondiente al número 20 y al polinomio binario, $x^2 + x^4$. La notación 2<0,2> = <2><0,2> significa que el 2 exterior al símbolo <> se toma como sumando común a los números 0,2 que aparecen en el interior. Más precisamente 2<0,2> = <0+2,2+2> = <2,4>. En general,

$$\boxed{k\langle n_0, n_1, \ldots, n_j\rangle = \langle k+n_0, k+n_1, \ldots, k+n_j\rangle}$$

De aquí en adelante identificaremos a los números con sus respectivos espectros. Así diremos que,

20 = <2,4> = <2<0,2>> = <2><0,2> = $(x^2)(1 + x^2) = 4\times 5$.

Esta forma de transformar el espectro nos va permitir encontrar los factores primos de un número dado. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 12. Verificar que el número binario 11011 es divisible por 3.

El número 11011 tiene por espectro a <0,1,3,4> que proviene del polinomio $1 + x + x^3 + x^4$. Transformemos este espectro para aislar los factores primos que aparezcan en él.

<0,1,3,4> = <0<0,1>,3<0,1>> = <0,1><0,3> = <0,1><0,1,1,2> = <0,1><0<0,1>,1<0,1>> = <0,1><0,1><0,1> = $\langle 0,1\rangle^3 = (1 + x)^3 = 1 + x + x^3 + x^4 = 3^3$ = 27. Se concluye que 11011 es divisible por 3 = 1 + x.

Ejemplo 13. Descomponer 210 en factores primos usando su respectivo espectro.

210 = 128 + 64 + 16 + 2 = $x + x^4 + x^6 + x^7$ = <1,4,6,7>. Usando las transformaciones elementales discutidas arriba, encontramos que:

210 = <1,4,6,7> = <1,2,2,3,6,7> = <1<0,1>,2<0,1>,6<0,1>> = <0,1><1,2,6> = <0,1><1,2,3,3,4,5> = <0,1><1<0,1,2>,3<0,1,2>> = <0,1><0,1,2><1,3> = <0,1><0,1,2><1<0,2>> = <1><0,1><0,2><0,1,2>= $(x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x + x^2) = 2\times 3\times 5\times 7$.

Se concluye que, 210 = $2\times 3\times 5\times 7$.

Ejemplo[5] 14. Verificar la primalidad de 98363. De no ser primo hallar sus factores primos y encontrar el primo más cercano a él.

98363 = $1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^{15} + x^{16}$ = <0,1,3,4,5,15,16> = <0,1,3,4,5,6,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,15>.

---

[5] Tomado de: https://www.maa.org/FoundMath/11week17.html

Al mirar ese espectro uno se da cuenta que no es divisible por 3 (la suma de sus cifras no es múltiplo de 3), y por cuanto que, la secuencia <0,1>, <1,2>, …, <14,15> implica división por 3, pero el espectro adicional <15> = $x^{15} = 2^{15}$, no tiene como factor a 3. Tampoco es divisible por 5, pues el número no termina ni en cero ni en cinco. No es divisible por 7 porque la secuencia 0,1,2 no se logra a partir del espectro dado; el mismo argumento vale para las secuencias 0,1,3; 0,2,3; 0,4 en el espectro, asociadas a los números 11,13 y 17 respectivamente.

Habría que intentar con 19 = <0,1,4>. Por los colores de la acentuación arriba se vislumbra una posibilidad que 19 sea un divisor. Miremos el espectro formado por los números que quedaron sin colorear:

<3,8,13,14,15> = <3,4,4,5,6,7,8,8,9,10,11,12,14,15> = <3,4,7,4,5,8, 8,9, 12, 10, 11, 14, 6,15,> = <3,4,7,4,5,8,8,9,12,10,11,14,6,7,7,8,9,10,11,10,10,11,13,14> = <3,4,7,4,5,8,8,9,12,10,11,14,6,7,10,7,8,11,9,10,13,10,11,14> = <3<0,1,4>,4<0,1,4>,8<0,1,4>,10<0,1,4>,6<0,1,4>,7<0,1,4>,9<0,1,4>,10<0,1,4>> = <0,1,4><3,4,8,10,6,7,9,10> = <0,1,4><3,4,6,7,8,9,10, 10> = <0,1,4><3,4,6,7,8,9,11>.

Reemplazando

<0,1,3,4,5,15,16> = <0,1,3,4,5,6,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,15> = <0,1,4,5,6,9,6,7, 10,11,12,15,3,8,13,14,15> = <0,1,4,5,6,9,6,7,10,11,12,15, <0,1,4><3,4,6,7,8,9,11>.> = <0<0,1,4>,5<0,1,4>,6<0,1,4>,11<0,1,4>,<0,1,4><3,4,6,7,8,9,11>> = <0<0,1,4>,5<0,1,4>,6<0,1,4>,11<0,1,4>,<0,1,4><3,4,6,7,8,9,11>> = <0,1,4><0,5,6,11,3,4,6,7,8,9,11> = <0,1,4><0,3,4,5,10,12> = $(1 + x + x^4)(1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^{10} + x^{12}) = 19 \times 5177 = 98363$.

De otra parte

5177 = <0,3,4,5,10,12> = <0,1,1,2,3,3,4,4,5,5,6,7,8,9,10,10,11> = <0,1,2,3,4,1,2,3,4,5, 2,3,4,5,6,5,6,7,8,9,7,8,9,10,11> = <0<0,1,2,3,4>,1<0,1,2,3,4>, 2<0,1,2,3,4>, ,5<0,1,2,3,4>,7<0,1,2,3,4>> = <0,1,2,3,4><0,1,2,5,7> = $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^5 + x^7) = 31 \times 167$.

Por lo tanto, $98363 = 19 \times 31 \times 167$.

El primo más cercano a este número lo hallaríamos siguiendo el proceso descrito en la primera parte de este ejemplo, pero como no es el propósito repetir lo mismo, podemos recurrir a la Web[6] para hallar que el primo más cercano es **98369**.

Ejemplo 15.

Verificar que $2^{32} + 1$ es divisible por 641. Este es el primer número no primo de los que Pierre de Fermat (1601-1665)[7] sostuvo que eran todos primos. Los llamados primos de Fermat tienen la forma

[6] http://primes.utm.edu/curios/home.php.

$$F(n) = 2^{2^n} + 1$$

Y son primos para n = 0, 1, 2, 3, 4. Leonhard Euler (1707-1783) mostró que F(5) = 4294967297 = 641×6700417. Factorizar este número es un verdadero reto para los jóvenes por cuanto que hay que chequear su primalidad con números primos bastante grandes entre estos 641 = <0,7,9>.

Los espectros de los números de Fermat son del tipo <0, 2^{2^k} >. Para el caso que nos compete tenemos que,

F(5) = <0,32> = <0,7,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,17,17,19,18,18,19,20,20,21,21,22,22,24,25,26,27,28,29,30,31> =

<0,7,9,7,14,16,8,15,17,10,17,19,11,18,20,12,19,21,13,20,22,17,24,26,18,25,27,21,28,30,22,29,31>

= <0<0,7,9>,7<0,7,9>,8<0,7,9>,10<0,7,9>,11<0,7,9>,12<0,7,9>,13<0,7,9>,17<0,7,9>,18<0,7,9>,21<0,7,9>,22<0,7,9>> =<0,7,9 ><0,7,8,10,11,12,13,17,18,21,22> = $(1 + x^7 + x^9)(1 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{17} + x^{18} + x^{21} + x^{22}) = 641 \times 6700417$. Esto muestra que F(5) es compuesto.

6 – El algoritmo de la División visto en el Espectro.

El algoritmo de la división aplicado a dos números, D y d está involucrado en el proceso de hallar el cociente c, y el residuo, r, de la división de los números dados. Esto se expresa a través de la igualdad

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}, \text{ ó, } D = cd + r$$

Donde $0 \le r < d$. Aquí los enteros D y d se denominan Dividendo y Divisor respectivamente.

Ejemplo 16. Usemos el espectro de 265 para hallar el cociente y el residuo de la división por 17.

Aquí, $D = 265 = 256 + 8 + 1 = 1 + x^3 + x^8$ = <0,3,8>.
$d = 17 = 1 + x^4$ = <0,4>.

[7] Para complementar un poco la vida y obra de Fermat mi artículo, *Reseña histórica de algunos Problemas en Teoría de Números* disponible en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/historiam.htm

Lo normal para verificar la divisibilidad es trabajar el espectro de tal forma que el espectro de 265 contenga en él, el espectro de 17.

<0,3,8> = <0,3,4,4,5,6,7> = <0,4,3,7,4,5,6> = <0,4,3,7,1,1,2,3,5,6> = <0,4,3,7,1,5,2, 6,1,3> = <0,4,1,5,2,6,3,7,1,3> = <0<0,4>,1<0,4>,2<0,4>,3<0,4>,1,3> = <0,4><0,1,2,3> + <1,3>.

Dentro del espectro de la parte resaltada se puede observar el cociente c = <0,1,2,3> = $1 + x + x^2 + x^3 = 15$ y en la parte final del espectro aparece el residuo <1,3> = $x + x^3 = 10$. El proceso desarrollado se comprueba en la igualdad: $265 = 15\times 17 + 10$.

Cuando el residuo es cero decimos que la división es exacta, o que el divisor d divide exactamente a D o también que d es un factor de D. Con los espectros de los números naturales, como se ha visto, es posible trabajar la división sin mayores dificultades.

Es de resaltar que la aritmética que hemos descrito en este artículo nada tiene que ver con cálculos algorítmicos tradicionales ni con el uso de calculadora, salvo para verificar, si se quiere, la exactitud de los resultados. En la parte operativa se hace necesario sumar potencias de dos, pero la suma de estas potencias es más fácil memorizar que las tablas de multiplicar, por ejemplo.

Ejemplo 17. Factorizar $2^{11} - 1$.

Este es un ejemplo de los llamados números de Mersenne, $M_n = 2^n - 1$, y el primero para el cual siendo n primo, M_n es compuesto. Estos números se originaron con Marin Mersenne (1588-1648). La cacería de números primos de Mersenne se ha extendido a nivel global dando como resultado el hallazgo de los mayores primos conocidos hasta la fecha. El chequeo de primalidad usando 2,3,5,7,11,13,17 y 19 muestra que M_{11} no es divisible entre ninguno de esos primos, sin embargo para 23 = <0,1,2,4>, encontramos,

4,4 5,5 6,6 7,7 8,8

$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$ = <0,1,2,3,4,$\overline{5,6,7,8,9,}$ 10> = <0,1,2,4,3,4,5,7,4,5,6,8,6,7,8,10> = <0<0,1,2,4>,3<0,1,2,4>,4<0,1,2,4>,6<0,1,2,4>> = <0,1,2,4><0,3,4,6> =
$(x^4 + x^2 + x + 1)(x^6 + x^4 + x^3 + 1) = 23\times 89$.

La parte del espectro señalada como $\overline{5,6,7,8,9,}$ se ha reemplazado por 4,4 5,5 6,6 7,7 8,8, usando la propiedad de que <*n*> = <*n* –1,*n* –1>.

Ejemplo 18. Chequear la primalidad de 5183.

La primalidad de un número es la condición de ser: ó primo ó compuesto. Podemos utilizar lo ya visto para descubrir algún patrón en el espectro del número que sugiera la aparición de factores primos. La estrategia a seguir es descomponer el espectro de tal modo que aparezcan sucesivamente la totalidad de los números entre 0 y 12, y allí observar si aparece a simple vista una sucesión de números con un patrón especial. Usaremos resaltador para destacar la aparición de múltiplos de <0,3,6>.

No siempre es fácil detectar el patrón o molde que se repite y que se busca. En este caso con un poco de ensayo y error uno encuentra que:

$5183 = x^{12} + x^{10} + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = <0,1,2,3,4,5,10,12> =$
$<0,1,2,3,4,5,6,6,7,8,9,12> = <0,3,6,1,4,7, 2,5, 8, 6,9,12> =$
$<0<0,3,6>,1<0,3,6>,2<0,3,6>,6<0,3,6>> = <0,3,6><0,1,2,6> = (1+ x^3 + x^6)(1+ x + x^2 + x^6) = 73\times 71.$

Esto muestra que 5183 es compuesto y que es además el producto de dos primos gemelos, 71 y 73. Los primos gemelos son pares de primos que difieren en 2. Más ejemplos de este tipo puede verse en mi página Web.[8]

Aunque en la práctica el método expuesto trabaja manualmente para números relativamente pequeños, también es cierto que de implementarse en el computador su alcance se hace tan amplio como la capacidad de la máquina permita.

7 – Potenciación.

Si un número n se multiplica por si mismo un número k de veces decimos que n está elevado a la k – ésima potencia y lo notamos n^k. Visto desde el espectro, este proceso aparece como una multiplicación repetida del mismo factor, como se puede observar en los siguientes ejemplos,

Ejemplo 19.

Calcular el cuadrado de 33 usando su espectro y extraer la raíz cuadrada del resultado encontrado.

El espectro de $33 = 32 + 1 = 2^5 + 1^0$ es <0,5> y por lo tanto

$33^2 = <0,5>^2 = <0,5><0,5> = <0+0,0+5,5+0,5+5> = <0,5,5,10> = <0,6,10> = 2^{10} + 2^6 + 1^0 = 1024 + 64 + 1 = 1089$. A la inversa,

$1089 = <0,6,10> = <0,5,5,10> = <0<0,5>,5<0,5>> = <0,5><0,5> = <0,5>^2$. Se sigue que

$$\boxed{<0,6,10> = <0,5>^2}$$

Usando la simbología para la extracción de raíz positiva usual, concluimos que:

[8]Ver:
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/LaEducacionMatecomodelasMatematicasAplicadas.pdf

$$\boxed{<0,6,10>^{1/2} = <0,5>}$$

Que traducido al sistema decimal y a la aritmética corriente es:

$$\sqrt{1089} = 33.$$

Ejemplo 20.

Elevar al cuadrado el número <3,5> haciendo el paralelo con el cuadrado de $x^2 + x^5$

Usemos la siguiente tabla en donde se muestra la equivalencia en el nivel de los polinomios y en el nivel de los espectros, recordando que $x = 2$.

40^2	$<3,5>^2$	$<3+3,1+3+5,5+5>$	$<6,9,10>$	1600
$(8 + 32)^2$	$(x^3 + x^5)^2$	$x^3x^3 + x\,x^3x^5 + x^5x^5$	$x^6 + x^9 + x^{10}$	1600

La aparición del número 1 en el segundo término del espectro se debe al doble producto del primero por el segundo del que nos habla el famoso binomio de Newton. Observe además que los cuadrados de x^3 y x^5 aparecen en el espectro como 3+3, y, 5+5. En general si $n = <a,b>$, tendremos

$$\boxed{<a,b>^2 = <a+a,1+a+b,b+b>.}$$

Los métodos expuestos a lo largo de este artículo, esperamos poder extender, a los números racionales usando exponentes negativos y toda una nueva baraja de posibilidades se abrirá para aplicar el álgebra al estudio de la aritmética elemental.

Armenia, Colombia, Mayo de 2011.