# MATEMÁTICAS Y FILOSOFÍA EN EL AULA DE CLASE
## La filosofía y el descubrimiento de los irracionales

**Diego Pareja Heredia, *Universidad del Quindío***
**Jairo Urrea Henao, *Universidad del Quindío***

**1. Introducción.**
De tiempo atrás los autores de este trabajo, han estado intercambiando reflexiones sobre temas y conceptos relacionados con tres campos del saber: filosofía, matemáticas y literatura. En esta oportunidad analizaremos algunas interpretaciones en torno al concepto de igualdad, tanto en matemáticas (aritmética y geometría) como en el campo político (filosofía y jurisprudencia).

El *Principio de Justicia* se asocia tradicionalmente a los principios de equidad, igualdad, reciprocidad, ideas éstas que conforman buena parte del núcleo de las matemáticas. Una definición corriente tomada de un diccionario nos dice que "justicia es la virtud que nos hace dar a cada cual lo que le corresponde", Ahora, ¿cómo podemos establecer esta medida de distribución? Esta y casi todas las definiciones de justicia parten de un principio de igualdad, Surge entonces la pregunta ¿Cuál es el fundamento de este principio de "igualdad"

La reflexión y las preguntas que hemos querido formular responden a consideraciones de filósofos contemporáneos, tales como las del filósofo de la ciencia Karl R Popper en su libro *La Sociedad Abierta y sus Enemigos* (1957)[1] y, a aquellas del filósofo y teórico de la argumentación y la jurisprudencia Chaïm Perelman, en sus libros: *El Imperio Retórico* (1977),[2] y, *Tratado de la argumentación* (1989)[3]. Empecemos por caracterizar el problema, para luego planteamos las preguntas.

Un primer antecedente a esta problemática nos la presenta Karl Popper, cuando afirma que al parecer, la mayoría de nosotros tenemos una fuerte inclinación, a aceptar las peculiaridades de nuestro medio social como si fueran "naturales". Esta tendencia tiene una explicación, según el filósofo, y es la siguiente: su origen está en nuestro temor de aceptar que caiga exclusivamente sobre nosotros toda la responsabilidad de nuestras decisiones éticas, sin ninguna posibilidad de transferencia, ya sea a Dios, a la naturaleza, a la sociedad o a la historia. Todas estas teorías éticas tratan desesperadamente de encontrar a alguien, o quizá buscar un argumento, que nos libere de esta carga. Pero, (continúa aclarando Popper), no podemos eludir tal responsabilidad; cualquiera sea la autoridad que aceptemos, seremos nosotros quienes aceptamos; si nos negamos a comprender esta verdad tan simple, sólo estaremos tratando de engañarnos a nosotros mismos [6, *p*. 66].

---

[1] Popper, Karl R. *La sociedad abierta y sus enemigos*. Ediciones Paidós. Barcelona. 1994.
[2] Perelman, Chaïm. *El imperio retórico*. Grupo Editorial Norma. Santafé de Bogotá. 1997.
[3] Perelman, Chaïm, et al. T*ratado de la argumentación*. Editorial Gredos. Madrid. 2000.

Muy temprano en nuestra historia occidental se generó una discusión alrededor del concepto de igualdad social, precisamente fundamentada en el saber aritmético y el geométrico. Esto nos lo muestra Popper en la polémica desatada entre los siglos IV y III AC, entre los filósofos retóricos, llamados por Platón, "sofistas", y el propio Platón. En Grecia se da por primera vez un gobierno democrático liderado por Pericles, este tipo de gobierno trajo a Atenas pensadores e intelectuales de todas partes. Igualmente las ideas brotaron por doquier y las polémicas se tomaron el escenario político-filosófico.

Una de esas polémicas estaba centrada sobre la idea de justicia social. La idea de justicia estaba basada en dos ideas de "igualdad". Una idea se fundamentaba en la "igualdad" como medida, peso o número, es decir, igualdad numérica o aritmética. La otra liderada por Platón, quien consideraba, en el Diálogo *El Gorgias*, por ejemplo, que la justicia era igualdad, como piensa la mayoría de la gente y que no sólo concuerda con la "convención", sino también con la naturaleza misma, [6, p. 98]. En *Las leyes*, 757/b, Platón al final de su carrera filosófica toma partido por un concepto de igualdad basado en las matemáticas: "La verdadera y la mejor igualdad…es la que distribuye más a los mayores y menos a los pequeños, dando a cada uno la medida debida, de acuerdo con la naturaleza. Al concederle mayores honores a quienes son superiores por sus virtudes y menores a quienes son inferiores en virtud y origen, distribuye a cada uno lo apropiado, de acuerdo con este principio de las proporciones" [6 p. 494]. Platón, llama a esta justicia "igualdad proporcional". Esta clase de justicia política o justicia distributiva recibió el nombre de geométrica.

Recordemos que sobre la puerta de la Academia Platón hizo colocar el siguiente letrero: "¡El que no sepa geometría que no entre en esta casa!". Dice Popper entonces, en esa larga nota nueve [6, p. 494], que: "Tal como se cree generalmente en la actualidad, el primitivo tratamiento pitagórico de la geometría había adoptado un método bastante semejante al que en nuestros días conocemos con el nombre de "aritmetización". La geometría era tratada como una parte de la teoría de los números enteros (o "naturales", es decir aquellos números compuestos de mónadas o "unidades indivisibles", y de sus "*logoi*", es decir, de sus proporciones "racionales". De aquí se desprendería una primera pregunta ***¿Cuál es la diferencia entre la igualdad aritmética y la geométrica***?

Es bueno recordar que desde los albores de la cultura humana. Las normas de igualdad y equidad han sido puestas en tela de juicio continuamente, por ejemplo, en la misma época de los griegos, por Protágoras, quien sostuvo que la naturaleza no conoce normas y que su introducción se debe exclusivamente al hombre. Y fue de este modo, que las instituciones y convenciones elevaron al hombre sobre el nivel de las bestias, lo cual representa la más importante conquista humana legada desde la antigüedad [6, *p.*75]. Esta reflexión es ampliada por el filósofo alemán Emmanuel Kant en su ensayo ¿Qué es la ilustración? (1784),[4] en la cual conmina a los hombres a que salgan de su minoría de edad, que consiste

[4] Kant Emmanuel. *Filosofía de la historia*. Fondo de Cultura Económica. FCE Colombia. 1994. Trd. Eugenio Ímaz.

en dejar que otros piensen por ellos. Además esta tendencia a buscar un responsable de nuestras decisiones ha sido explotada por literatos de todos los tiempos, sólo para citar uno de los más representativos, Thomas Mann, quien dedicó toda su obra a indagar por qué tanto el hombre occidental, como el oriental, busca obsesivamente un caudillo.

Una de las características que define a una sociedad que mantiene la tendencia a creer en determinismos es, que su vida transcurre dentro de un círculo encantado de tabúes inmutables, de normas y costumbres que se repiten, inevitables como la salida del sol, el ciclo de las estaciones u otras evidentes uniformidades semejantes a la naturaleza [6, *p*. 67].

Parte del problema radica en el uso del lenguaje y en la confusión que se presenta en el manejo de algunos conceptos. Por una parte, las *leyes naturales* o de la naturaleza, tales como las que rigen el movimiento del sol, de la luna y de los planetas, la sucesión de las estaciones; la ley de la gravedad, las leyes de la termodinámica, etc., son muy diferentes a aquellas que llamamos *leyes sociales o leyes normativas* o normas, que en realidad son prohibiciones y mandatos, es decir, reglas que prohíben o exigen ciertas formas de conducta, como por ejemplo, los diez mandamientos o las disposiciones legales que regulan el procedimiento a seguir para elegir a los miembros del parlamento o las leyes que componían la constitución ateniense [6 *p*. 67]. Ambos conceptos, los denominamos con la misma palabra, leyes, pero en realidad en cada caso significan cosas bien diferentes. A las unas las llamamos leyes naturales y representan regularidades, a las otras, leyes sociales y representan prohibiciones y derechos; y como es sabido no se le puede prohibir a la naturaleza que siga su curso, pero en cambio las leyes sociales son susceptibles de ser modificadas.

Debe quedar claro que ninguna norma social se desprende de una regularidad natural. Esto no significa entonces, como a veces se hace creer, que las leyes naturales son necesarias y las normas sociales son arbitrarias. Es perfectamente cierto que nuestras decisiones deben ser compatibles con las leyes naturales (incluyendo las de la psicología y fisiología humana), si han de llegar a ser puestas en práctica; en efecto, si se oponen a esas leyes no es posible, simplemente cumplirlas. La decisión de que todo mundo trabaje más y coma menos, por ejemplo, no puede ser llevada a cabo más allá de cierto punto, por razones fisiológicas; es decir, porque más allá de cierto límite la disposición sería incompatible con ciertas leyes naturales de la fisiología [6 *p*. 72].También es bueno agregar que no todas las "leyes sociales", es decir todas las uniformidades de nuestra vida social, son normativas e impuestas por el hombre. Muy por el contrario, también existen importantes leyes naturales de la vida social; para éstas, parece ser apropiada la designación de, *leyes sociológicas*. Es precisamente el hecho de que, en la vida social nos encontramos con ambas clases de leyes, naturales y normativas, lo que confiere tanta importancia a su clara y precisa diferenciación.

Una de esas leyes, o reglas que se mueven entre las leyes sociológicas y normas sociales es "La regla de justicia". ¿Cuál es su estatuto? La gran mayoría de doctrinas y sistemas sociales y políticos lleva aneja una idea de justicia. Modelos como el conservatismo, liberalismo, socialismo, comunismo, anarquismo y otros movimientos y teorías pueden ser descritos desde el punto de vista de sus correspondientes ideas, e ideales, concernientes a la idea de justicia[5]. En muchas de las teorías modernas sobre la justicia se discute sobre qué es lo justo para el individuo dentro de una sociedad.

El principio admitido generalmente de la igualdad ante la ley, significa que todos los seres que poseen las propiedades exigidas por la ley, serán tratados de la misma manera, es decir de la manera determinada por la ley [4, *p.* 96]. Perelman recurre a una definición más general tomada de la lógica y acuñada por Leibniz, dos seres a y b son equivalentes, si toda afirmación referente a uno de estos seres es una afirmación referente al otro. Resulta de ello que será racional tratar de la misma manera a los seres equivalentes, pues no existe ninguna razón para tratarlos de manera diferente [4, *p*. 94]. ¿Cómo sabemos cuándo dos seres son equivalentes? ¿Hay seres equivalentes? El problema que se plantea entonces en la práctica es el de saber en qué caso es racional o justo tratar de la misma manera a dos seres, o a dos situaciones que difieren, pero que asimilamos una a otra [4, *p*. 95].

Ahora volvamos a Popper ¿Qué queremos decir, en realidad, cuando hablamos de "Justicia"? Desde un punto humanista se entiende (a) una distribución equitativa de la carga de la ciudadanía, es decir, de aquellas limitaciones de la libertad necesaria para la vida social; (b) tratamiento igualitario de los ciudadanos ante la ley, siempre que, por supuesto, (c) las leyes mismas no favorezcan ni perjudiquen a determinados ciudadanos individuales o grupos o clases; imparcialidad de los tribunales de justicia, y (e) una participación igual en las ventajas (y no sólo en las cargas) que pueden corresponder para el ciudadano su carácter de miembro del estado. Como podemos observar en todas las definiciones que hemos traído, los conceptos de igualdad y de equivalencia están presentes y con una orientación hacia la cuantificación y cualificación de los individuos que están inmersos dentro de una sociedad. Resumiendo, *La Justicia es una institución basada en un principio o regla de "igualdad"* y de aquí la pregunta ¿Es posible que los matemáticos ayuden a encontrar los fundamentos del principio de igualdad para la justicia? La respuesta a este último interrogante quedará como un reto para matemáticos que se involucren en la filosofía matemática.

De los párrafos anteriores surgen varias preguntas, no sólo de las apreciaciones de Platón, sino también de las interpretaciones que el mismo Popper hace de Platón. Un primer interrogante: ¿Es la "igualdad" a que se refiere Platón, el concepto matemático que utilizamos corrientemente, por ejemplo, en las ecuaciones o en los procesos de transvase argumentativo de las proposiciones matemáticas? La repuesta a nuestro parecer, es no, porque la igualdad matemática tiene un sentido de identidad y no permite esguinces interpretativos como los que hace Platón en *Las Leyes*, donde el referencial mayor es la política y cuyo telón de fondo es el estado en su concepción aristocrática. Esta "igualdad" tendría más una connotación de *equidad* en el sentido de la distribución de méritos, honores o riquezas a repartir dentro del sistema.

[5] Ferrater Mora, José. *Diccionario de Filosofía*. Editorial Ariel, S:A: Barcelona.2002.

Otra pregunta es ¿Qué entiende Platón por *proporción*? La respuesta a este interrogante, irá dibujándose en la medida en que desarrollemos el tema de la conmensurabilidad en las siguientes páginas.

El tercer interrogante tiene que ver con la diferencia entre números racionales e irracionales. Esta diferencia se verá al final de este corto ensayo.

**2. El concepto de igualda d.**

Las matemáticas a las que hoy tenemos acceso, con sus métodos y su simbología, tienen poco en común con las matemáticas que conocieron y trabajaron Platón, y sus contemporáneos cultos de la antigua *Hélade*. Empezando por los símbolos. La igualdad, hoy la representamos por " = "; sin embargo, este símbolo, sólo aparece en imprenta en 1557, introducido por Robert Recorde (*ca*. 1510-1558) en un álgebra titulada *The Whetstone of Witte (La Piedra de Toque de la Sabiduría)*, donde la única justificación para escogerlo es, según sus palabras: "porque no otras dos cosas pueden ser tan iguales".

Gottfried Leibniz (1646-1716) en el libro *De Arte Combinatoria*, hace de la igualdad de conceptos un objeto de estudio y de análisis. Entre las propiedades que se desprenden de sus estudios están las siguientes:

REFLEXIVIDAD. Si **A** es un concepto, entonces **A = A.**
SIMETRIA. Para conceptos **A** y **B**, si **A = B,** entonces **B = A.**
TRANSITIVIDAD. Para conceptos **A, B** y **C**, si **A = B** y **B = C,** entonces **A = C.**

Una relación, como la igualdad, con estas propiedades, se denomina una *relación de equivalencia*. Relaciones de este tipo son muy importantes en matemáticas. El álgebra moderna tiene como capítulo importante las relaciones de equivalencia que van a dar origen a las clases residuales y por ende a ejemplos de ciertas estructuras algebraicas llamadas grupos.

Euclides en los Elementos, y Aristóteles en la Lógica, tratan este tipo de conceptos. El primer ejemplo de una relación de equivalencia en la geometría es la congruencia de figuras planas. El silogismo como lo interpreta Aristóteles es un caso en el que la transitividad está presente. Si aceptamos en la geometría de Euclides que, una recta es paralela a si misma, entonces el concepto de paralelismo es una relación de equivalencia, que particiona el conjunto de todas las rectas, en clases de rectas que tienen en común entre ellas el ser paralelas a una recta dada. En *Geometría Proyectiva* el punto donde las rectas paralelas se encuentran se denomina el punto en el infinito. El conjunto de todos los puntos en el infinito se llama la *recta en el infinito*.

**3. Nociones de Matemáticas Pitagóricas**

Pitágoras de Samos (siglo VI A. C.) y su escuela Pitagórica (Siglos VI - III AC) contribuyeron con mucho, al desarrollo de las matemáticas. Su concepción filosófica tenía por base el número natural. Para los pitagóricos todo era número. La misma geometría fue aritmetizada al asociar números a las figuras geométricas, como es el caso de los números triangulares asociados a los triángulos, los números cuadrados a los cuadrados, los números pentagonales a los pentágonos, etc. A los triángulos rectángulos les asociaron triplas como (3, 4, 5), (5, 12, 13), donde los números representan las longitudes de los lados del triángulo. El teorema que lleva el nombre de Pitágoras era ya un resultado conocido en Babilonia, un milenio antes de que naciera Pitágoras. A este filósofo y matemático griego deberíamos recordarlo, como a uno de los primeros pensadores preocupados por la búsqueda de un orden del conocimiento abstracto, y sobre todo como el filósofo, que expuso razones que explicaran, usando el concepto de número, la esencia de todas las cosas.

Pitágoras fue heredero de la cultura científica jónica liderada por Tales de Mileto que vivió alrededor del siglo VII AC. Otros miembros destacados de la escuela jónica fueron Anaximandro, Anaxímenes y Heráclito. Pitágoras se autollamaba "filósofo", o sea amante de la sabiduría, y en efecto él, entre otros, estuvo en la búsqueda de patrones abstractos, y de un orden cosmológico.

En el teorema de Pitágoras resaltan todas las características del conocimiento matemático: *Abstracción, Precisión, Certeza y Permanencia*. Las matemáticas creadas por Pitágoras y los antiguos griegos, han servido de modelo para la búsqueda de nuevos conocimientos y para ir cimentando la acumulación de los mismos en forma razonable, con argumentaciones que rebasan los ejemplos particulares. La cosmología griega va más allá del mundo que nos rodea, del movimiento planetario, de la predicción y análisis de los fenómenos naturales, pues toca también, los patrones de pensamiento y el lenguaje con el que razonamos y pensamos. ¿Qué hizo Pitágoras para que su famoso teorema tuviera la solidez y certeza que lo ha caracterizado? Uno respondería ahora que su certeza está en la prueba, o sea, en la cadena argumentativa, que por medios lógicos desemboca en la conclusión del teorema. El gran mérito de Tales, Pitágoras y demás matemáticos griegos, no es tanto haber descubierto y formulado resultados, sino haber asociado a los mismos, una prueba que los sustente. Esta tradición argumentativa se inicia con Tales a quien se le atribuye un buen número de teoremas y sus demostraciones, que aparecerán luego en la obra de Euclides, "*Los Elementos*".

Como mencionamos, el llamado teorema de Pitágoras se conocía en tiempos de Babilonia, como lo muestra una tablilla de arcilla que en caracteres cuneiformes exhibe triplas pitagóricas que satisfacen la relación $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$. Esta tablilla tiene el número 322 en la colección Plimpton del museo de la Universidad de Columbia en Nueva York. De los griegos heredamos los métodos de prueba y con ello el patrón de argumentación usado en el método matemático. El método matemático se puede sintetizar en el proceso lineal siguiente:

*Observación – Abstracción – Apropiación – Descripción – Prueba*

La teoría de números o aritmética, tuvo su época de oro en tiempos de los pitagóricos. La aritmética fue esencialmente la teoría abstracta de números, muy diferente de lo que ellos llamaban *logística*, o arte del cálculo numérico o a lo que llamamos hoy aritmética elemental. Los pitagóricos construían las tablas de sumar y multiplicar pero solo enseñaban a manejarlas; no ha construirlas. Iniciaron el estudio del sonido, particularmente lo relativo a cuerdas vibrantes, asociando la longitud de la cuerda con su altura sonora. Encontraron que la armonía del sonido, depende de las relaciones numéricas asociadas a las longitudes de las cuerdas vibrantes. En astronomía llegaron a sustentar la esfericidad de la tierra. El conocimiento que tuvieron en matemáticas se puede equiparar al contenido de los libros I, II, III, IV, y VI de los *Los Elementos* de Euclides, más lo que representa el álgebra geométrica, que es un conjunto muy interesante de propiedades que se desprenden de las figuras geométricas. Estudiaron los números primos, los números perfectos y llegaron hasta asociar a los números cualidades humanas. Este es el caso de los números amigos, que como la pareja 220, 284 representaba la amistad; por cuanto que, la suma de los divisores propios del uno, da como resultado el otro, y viceversa.

La *logística*, siempre fue considerada por los griegos, una disciplina de bajo perfil. Tal vez por eso, no desarrollaron un sistema numérico que facilitara las operaciones y que agilizara el cálculo numérico. En el tiempo de los pitagóricos se usó el sistema jónico de numeración, era aditivo y los numerales estaban representados por las letras de su mismo alfabeto, junto a tres símbolos del antiguo alfabeto fenicio. En ese sistema a cada palabra se le asociaba un número. Por ejemplo, a la palabra ***logos*(*????s*)** que significa razón, idea, pensamiento, se le asoció el número 373, porque en su numeración, las letras griegas correspondientes dan: ***?*** = 30, ***o*** = 70, ***?*** = 3, ***o*** = 70 y ***s*** = 200, cuya suma reproduce al número 373.

## 4. Sobre el concepto de *Logos*.

El término “logos” es de aparición frecuente en las lenguas occidentales que derivan del griego o del latín, o están relacionadas con éstas, como el inglés, el alemán y las lenguas eslavas. Como sufijo, significa estudio, tratado; como en las palabras: *metodología, astrología, oftalmología*. También lo encontramos como prefijo en *logotipo, logaritmo, lógica, logística*. Al latín se tradujo como *ratio*, con muchas acepciones, entre ellas, *rata* (rata de interés, proporción) *cálculo, cuenta, tomar en consideración, disposición, plan,* ***razón***(cociente de números), *razón, juicio, causa, teoría, doctrina,* y muchas otras. Pero la cadena sigue pues de estas acepciones se derivan otras muy importantes como por ejemplo: racional, racionamiento, causalidad, etc. El termino ????s-(plural ?????), en griego significa, ***razón***, *idea, conocimiento.*

Recordemos que Pitágoras era *jonio* (oriundo de Asia Menor y sus islas) y compartía rasgos culturales con Tales de Mileto y Heráclito de Éfeso. Heráclito basaba su filosofía en el cambio y el movimiento y para Pitágoras la esencia de todo estaba en el número. Esa esencia que identifica al ser, es lo inmutable, lo que se preserva, en y después del cambio. Popper sugiere [7, *p.* 206] que el “logos”, al que se refiere Heráclito, podría ser la ley del cambio, la causa del equilibrio de las cosas, la medida, la regla, el cambio sujeto a ley. Pero la medida es un número y la ley se enmarca en un sentido numérico y así partiendo de Heráclito llegamos a Pitágoras en cuanto al origen del logos.

Para los pitagóricos la geometría podía aritmetizarse. Partiendo de la *mónada*(unidad), extendiéndose a los números naturales y a sus ?????, es decir, sus proporciones racionales, de la forma ***a/b***, donde ***a*** y ***b*** son números naturales, creían posible (*logizar)* metrizar, digámoslo así, el conjunto de todos los pares de segmentos. Su programa filosófico, sin embargo, se vino abajo, cuando descubrieron que, dos segmentos muy familiares en la geometría, como son, el lado y la diagonal del cuadrado, no permitían tal asociación. Aquí aparece uno de los grandes problemas que los pitagóricos no pudieron resolver y que a la postre daría origen a una nueva clase de números, *los irracionales*; aquellos números, no expresables como cocientes de números naturales.

En un contexto histórico, los pitagóricos perdieron una batalla, pero no la guerra en las aplicaciones de las matemáticas. Hoy las matemáticas en sus aplicaciones cotidianas, son esencialmente pitagóricas. Si no, ¿cómo estamos haciendo este trabajo en *Word* y la correspondiente exposición en *Power Point*, o escuchando la música en *Cds*, o viendo las imágenes en video, o en general recibiendo la televisión por cable o navegando en internet?. En términos generales, los medios y la tecnología actuales tienen formato ***digital***. Y decir digital, es referirse a secuencias de números (naturales), encargadas de mantener la esencia de la información que se desea trasmitir.

**5. El problema de la inconmensurabilidad.**

El programa pitagórico dentro de la geometría, tenía por objetivo, asociar a entes geométricos, valores numéricos. Empezando por la escogencia de la unidad de medida, asociaron a cada segmento, un número, su longitud. El siguiente paso fue asociar con cada par de segmentos la razón de sus longitudes. Sin embargo, este proceso requería que los segmentos en cuestión fueran *conmensurables*, en el sentido de poder encontrar un tercer segmento que los midiera a ambos en unidades enteras.

Concretamente: dos segmentos **AB** y **CD** son conmensurables, si existe un tercer segmento (unidad), digamos **UN,** tal que: *long***AB = m***long***UN,** y, *long***CD = n***long***UN** , donde **m** y **n** son números naturales y *"long"* en este caso significa longitud. Cuando este es el caso, se dice que los segmentos están en la razón **m : n**. En lenguaje pitagórico, el *logos* de los dos segmentos es **m/n**. Para nosotros los dos segmentos están asociados al número racional, o a la razón, **m/n.** Esta razón genera toda una familia de cocientes del tipo *k***m**/*k***n,** con *k* es entero, y con la propiedad de que cualquier par de elementos de la familia son iguales y dan origen a la clase de equivalencia {**m/n**}. La igualdad de dos elementos en una de estas clases, se llama una ***proporción***. Por ejemplo, en la clase **{1/2},** se cumple que 2/4 = 6/12, lo que muestra una proporción como igualdad de dos razones. El conjunto de todas estas clases, forman el conjunto **Q** de los números racionales.

Si dados dos segmentos, no existen tales enteros positivos **m** y **n**, se dice que los segmentos son *inconmensurables* y en este caso el número asociado a ellos, es ***un número irracional***.

La prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado llegó a nosotros en la obra de Aristóteles, según Popper, en los *Primeros Analíticos* [7, pag, 494]. La prueba es un ejemplo de una demostración indirecta, o demostración por reducción al absurdo, en la cual se niega la proposición que se quiere probar, y si suponiendo esto, se llega a una contradicción, concluimos que la hipótesis es falsa o sea que nuestra proposición inicial es verdadera. En cálculo proposicional la demostración se reduce a la siguiente tautología:

**P ? (R ´ ¬R) ? ¬P**

Tomando **P** = La diagonal y el lado del cuadrado son conmensurables.
**¬P=** La diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables.
Debemos hallar la contradicción **(R ´ ¬R)** para que quede probada **¬P.**

Formalicemos nuestra proposición en el siguiente teorema:

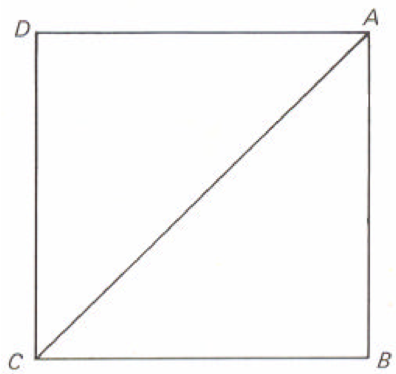



***fig.* 1**

***Teorema***. En el cuadrado ABCD, la diagonal AC y el lado AB son inconmensurables.

***Demostración.*** Sean $l$(AB) y $l$(AC), las longitudes del lado y la diagonal del cuadrado, respectivamente (*fig.* 1).

Supongamos lo contrario a lo que afirma el teorema, o sea, supongamos que la diagonal y el lado del cuadrado son conmensurables. Por definición existen números enteros **m** y **n**, tales que $l$(AC) = **m** y $l$(AB) = **n** . De aquí se sigue que

$$l(AC) \,/\, l(AB) = \mathbf{m}/\,\mathbf{n} \qquad \mathbf{(1)}$$

Supongamos que la fracción **m/n** es irreducible, lo que significa que **m** y **n** no tienen factor común distinto a la unidad, en particular, si uno es par el otro es impar y viceversa. Elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad (1), da

$$l^2(AC) \,/\, l^2(AB) = \mathbf{m^2 / n^2} \qquad \mathbf{(2)}$$

Por el teorema de Pitágoras, aplicado al cuadrado de la figura 1, $l^2(AC) = 2l^2(AB)$. Reemplazando en (2), llegamos a

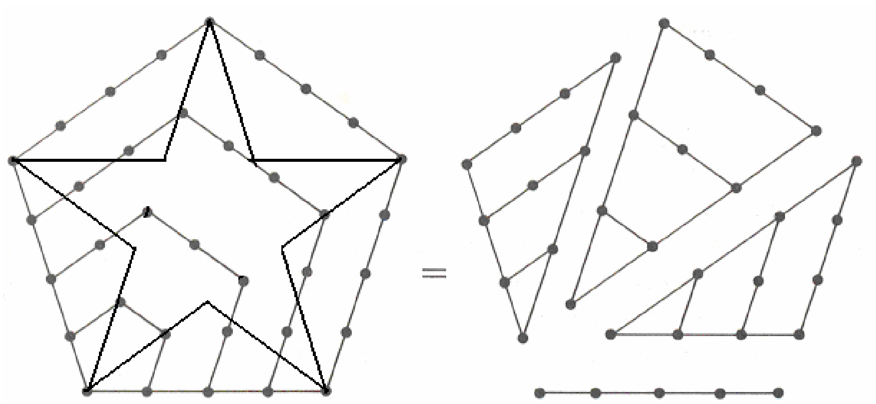
$$\mathbf{2 = m^2 / n^2}, \text{ o sea, } \mathbf{m^2 = 2\, n^2} \qquad \mathbf{(3)}$$

De donde **m²** es par y por consiguiente **m** es también par. Puesto que **m** y **n** tienen distinta paridad, **n** tiene que ser impar. Por otro lado, al ser **m** par, es de la forma **m = 2k.** Reemplazando en (3), obtenemos, $\mathbf{4k^2 = 2\, n^2}$ **.**

Simplificando queda, $\mathbf{n^2 = 2\, k^2}$**.** Esto implica que **n** es par y así **m** debe ser impar. El razonamiento nos lleva a que **m** es a la vez par e impar. Esta contradicción demuestra el teorema. En este ejemplo, la contradicción (**R** ´ ¬**R**), se da tomando **R** = **m** es par.

El teorema anterior muestra que, la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. En otros términos, no hay segmento que mida en unidades enteras a los dos segmentos.

Cuando el lado del cuadrado es de longitud unidad, lo que muestra el teorema es que, **v2** no puede expresarse como cociente de enteros, o sea que es irracional.




***Números Pentagonales en sucesión, la estrella de cinco puntas y un número pentagonal Como suma de números triangulares más n.***
***Fig. 2***

Sorprende saber que, los pitagóricos no hubieran descubierto la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del pentágono regular; si se tiene en cuenta que la estrella de cinco puntas (el *Pentáculo*, según el *Código Da Vinci*, De Dan Brown), símbolo de su hermandad, resulta de las diagonales del pentágono regular (Fig.2). La razón de estas longitudes es el número irracional **(1 + v5)/2,** conocido como la razón áurea y estudiado por Euclides en los *Elementos*.

La extensión del concepto de ***proporción*** que permita incluir a los números irracionales, la hicieron, el pitagórico Arquitas de Tarento, colega de Platón, y con gran profundidad, su discípulo Eudoxio, cuyo trabajo quedó incluido en el libro V de los *Elementos*[8, *p*. 90].

La definición de *proporción* en el libro V de Euclides aparece en los siguientes términos:

***Definición 5***. *Se dice que magnitudes están en la misma razón, si la primera es a la segunda, la tercera es a la cuarta, cuando, un equimúltiplo, cualquiera que se tome, del primero o del tercero, y cualquier equimúltiplo del segundo o del cuarto, los primeros equimúltiplos en su orden exceden, o igualan o son menores que los equimúltiplos de los segundos, respectivamente.*

En notación moderna la definición 5, quedaría así:

$$a:b = c:d$$

Significa que

$$na > mb \text{ implica que } nc > md$$
$$na = mb \text{ implica que } nc = md$$
$$na < mb \text{ implica que } nc < md$$

Donde $m$ y $n$ son enteros positivos.

El camino iniciado por Eudoxio sólo vino a continuarse en el siglo XIX con los trabajos del matemático alemán, Richard Dedekind (1831 – 1916), quien con las *Cortaduras* que llevan su nombre, dio carta de naturaleza, en las matemáticas modernas a los números irracionales.

**Referencias.**

1 - EVES, Howard. An *Introduction to the History of Mathematics*. Fourth Edition. Holt, Rinehard and Winston. New York, 1976.

2 - FERRATER MORA, José. *Diccionario de Filosofía*. Editorial Ariel, S:A: Barcelona.2002.

3 - KANT, Emmanuel. *Filosofía de la historia*. Fondo de Cultura Económica. FCE Colombia. 1994. Trd. Eugenio Ímaz

4 - PERELMAN, Chaïm. *El imperio retórico*. Grupo Editorial Norma. Santafé de Bogotá. 1997. Trd. Adolfo León Gómez Giraldo

5 - PERELMAN, Chaïm y Olbrechts-Tyteca Lucie. T*ratado de la argumentación*. Editorial Gredos. Madrid. 2000. Trd,. Julia Sevilla Muñoz.

6 - POPPER, Karl R. . *La sociedad abierta y sus enemigos*. Ediciones Paidós. Barcelona. 1994. Trd. Eduardo Loedel.
7 - POPPER, Kart R. *Conjeturas y Refutaciones*. Editorial Paidós, Barcelona. 1983
8 – van der WAERDEN, B. L. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer-Verlag. Berlin. 1983.

Apartes de esta exposición, los presentó uno de los autores (Pareja) en el *Seminario de Argumentación* realizado por el Grupo Interdisciplinario NAVE de la Universidad del Quindío, en el II Semestre de 2004.